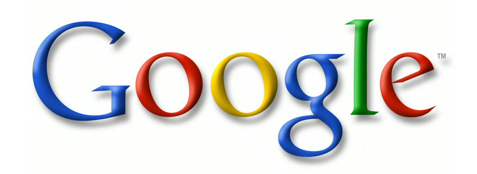




Abriss einer Theorie

der

complexen Functionen

und der

Thetafunctionen einer Veränderlichen

von

Dr. J. Thomae,
a. o. Professor in Halle.

Mit 20 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweite vermehrte Auflage.

Halle a/S.,
Verlag von Louis Nebert.
1873.

Vorwort.

Dieser Abriss soll eine kurze Uebersicht über die fundamentalen Eigenschaften der Thetafunctionen einer Veränderlichen und ihrer wichtigsten Darstellungen denen in die Hand geben, welche eine grössere Vorlesung über elliptische Functionen hören. Hierzu ist eine gewisse Kenntniss der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen unentbehrlich, welche deshalb der Theorie der Thetafunctionen voraufgeschickt wird.

Die wesentlichste Aenderung, welche diese zweite Auflage erfahren hat, ist die, dass die Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe daraus entfernt sind, und dafür eine Theorie der doppelt-periodischen Functionen, welche zu den eindeutigen gehören, eingefügt ist, welche für das Verständniss der Eigenschaften der Thetafunctionen bei weitem wichtiger ist. Die möglichen Unstetigkeiten der Functionen einer und zweier

Veränderlichen sind eingehend untersucht, und die elliptischen Functionen sind mehr als früher berücksichtigt.

Halle, im December 1872.

J. Thomae.

Inhaltsverzeichniss.

Theorie der complexen Functionen.

Eindeutige complexe Functionen.

(Seite 1—73.)

Seite

Ueber mehrdeutige complexe Functionen.

(Seite 74—119.)

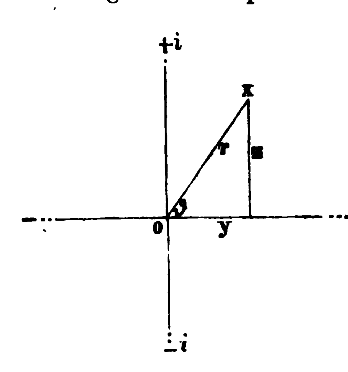
Nachträge und Bemerkungen.

(Seite 119—125.)

Theorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen.

Theorie der complexen Functionen.

Die complexen Zahlen, d. h. die Zahlen x von der Form $y+zi$, worin $i=\sqrt{-1}$ ist und y und z reelle Zahlen sind, bilden ein stetiges Grössengebiet von zwei Ausdehnungen. Ebenso bilden die Puncte einer Ebene ein stetiges Grössengebiet von zwei Ausdehnungen. Man ist deshalb im Stande, mit Gauss die complexen Zahlen auf die Puncte einer Ebene — wie jeder andern zweifachen stetigen Mannigfaltigkeit — zu beziehen, so dass jeder Punct der Ebene als Träger einer complexen Zahl angesehen wird. Die Beziehung der Zahlen und Punkte auf einander wird am einfachsten dadurch hergestellt, dass man den durch die rechtwinkligen Coordinaten y (Abscisse) und z (Ordinate) bestimmten Punct zum Träger der complexen Zahl $x=y+zi$ macht.



Nennt man die Strecke oder den Radiusvector r vom Anfangspunct der Coordinaten bis zu dem Träger der Zahl x — durch dieselbe Einheit als die Coordinaten y, z gemessen — den absoluten Betrag von x, und bezeichnet ihn abs(x), und den Winkel ϑ, den dieser Radiusvector mit der positiven y-Achse macht, den Winkel der Zahl, und bezeichnet ihn mit $\angle(x)$, so kann

ebenso, wie der Träger der Zahl x durch die Polarcoordinaten r und ϑ, die Zahl x selbst durch ihren absoluten Betrag und ihren Winkel bestimmt werden. Da nämlich

$$y = r\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta$$

ist, so folgt:

$$x = y + zi = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = r\,.\,e^{\vartheta i}.$$

Umgekehrt drücken sich auch absoluter Betrag und Winkel leicht durch den reellen und imaginären Bestandtheil der Zahl x, also durch y und z aus. Es ist nämlich

$$\operatorname{abs}(x) = r = \sqrt{y^2+z^2}, \quad \angle(x) = \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y},$$

worin das Wurzelzeichen stets positiv zu nehmen, der Winkel aber in dem Quadranten zu nehmen ist, in welchem die Zahl x liegt.

Wir erinnern an dieser Stelle an die bekannten Sätze, dass *das Produkt zweier complexen Zahlen das Produkt ihrer absoluten Beträge zum absoluten Betrag, die Summe ihrer Winkel zum Winkel hat, und dass der Quotient zweier Zahlen den Quotienten der absoluten Beträge zum absoluten Betrag, die Differenz der Winkel zum Winkel hat,* welche Sätze aus der Gleichung $x = re^{\vartheta i}$ unmittelbar folgen.

In Zeichen:

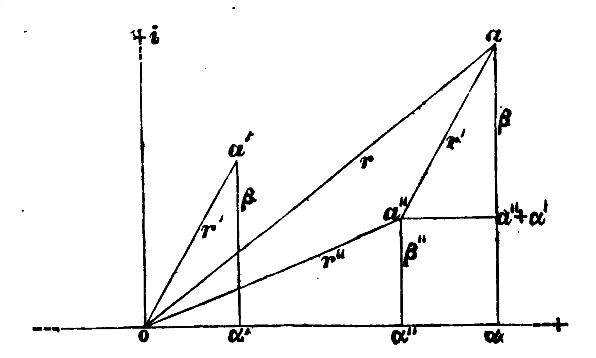
$$\operatorname{abs}(a.a') = \operatorname{abs}(a).\operatorname{abs}a', \quad \angle(aa') = \angle(a) + \angle(a').$$

Hätte man die Absicht eine Theorie der Exponential- und Kreisfunctionen als Functionen einer complexen Veränderlichen zu entwickeln, so dürfte man $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$ nicht durch $e^{\vartheta i}$ ersetzen, und müsste $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ als die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 1 und dem Winkel ϑ ansehen. Hier wird jedoch die Erweiterung jener Functionen für complexe Veränderliche als bekannt vorausgesetzt, und es werden nur der Analogie halber mit höheren Transcendenten hier und da Eigenschaften derselben entwickelt. Eben deshalb ist auch ϑ hier als eine Zahl, als die Masszahl der Länge eines Kreisbogens, und nicht als ein in Graden ausgedrückter Winkel aufzufassen.

Wir erinnern ferner an den Satz: Ist $a = \alpha + \beta i$ die Summe zweier complexen Zahlen $a' = \alpha' + \beta' i$, $a'' = \alpha'' + \beta'' i$, so ist stets

$$\operatorname{abs}(a) \leqq \operatorname{abs}(a') + \operatorname{abs}(a'').$$

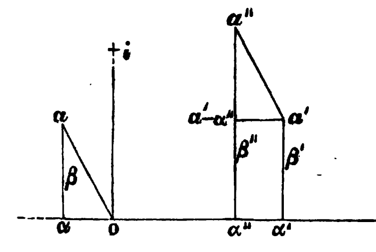
Stellt man sich nämlich die Zahlen a, a', a'' graphisch dar, wie dies in nachstehender Figur geschieht, und zieht von a'' eine Parallele zur y-Achse bis zum Träger der Zahl $a'' + \alpha'$, so sind



$(a', a''+\alpha', a)$ und (o, α', a') congruente Dreiecke, und demnach die Strecke $a''a = oa'$ gleich $\text{abs}(a') = r'$. Ferner ist $oa'' = \text{abs}(a'') = r''$, $oa = \text{abs}(a) = r$. Also bilden r, r', r'' ein Dreieck, und da immer zwei Seiten eines Dreiecks zusammen grösser als die dritte sind, so ist $\text{abs}(a) < \text{abs}(a') + \text{abs}(a'')$, wenn nicht a' und a'' gleiche Winkel (in gleichem Quadranten) haben, in welchem Falle $\text{abs}(a) = \text{abs}(a') + \text{abs}(a'')$ ist.

Die Differenz a zweier complexen Zahlen a' und a'' hat die Strecke zwischen den Trägern der beiden Zahlen zum absoluten Betrage, und den Winkel, welchen diese vom Subtrahendus zum Minuendus hin gerichtete Strecke mit der positiven y-Achse macht zum Winkel.

Stellt man nämlich die Zahlen $a' = \alpha'+\beta' i$, $a'' = \alpha''+\beta'' i$ und deren Differenz $a''-a' = a = \alpha+\beta i$ graphisch dar, so sind



die Dreiecke $(a', a'-\alpha'', a'')$ und (o, α, a) congruent, und demnach $\text{abs}(a) = r = (a', a'')$, und es ist (o, a) in gleichem Sinne parallel (a', a''), also der Winkel, den die Zahl a besitzt, derselbe als der, welchen die Strecke (a', a'') mit der positiven y-Achse macht.

Die hier angewandte Repräsentation der complexen Zahlen durch die Puncte einer Ebene gewährt manche Bequemlichkeiten, namentlich bei Bestimmung von Zahlengebieten und für die Terminologie. So ist eine stetige einfach ausgedehnte Zahlenreihe durch eine irgendwie gegebene Curve, deren Puncte die Träger

jener Zahlen sind, ausreichend bestimmt. Oder, es wird durch ein aus der Ebene ausgeschnittenes Stück ein zweifach ausgedehntes, begrenztes Zahlengebiet genau definirt. Z. B. durch einen um den Anfangspunct der Coordinaten mit dem Radius a geschlagenen Kreis wird ein Zahlengebiet abgegrenzt, welches analytisch durch die Bedingung $\text{abs}(x) < a$ gegeben ist. Es ist für manche Untersuchungen wichtig, solche aus der Ebene geschnittene Stücke in Bezug auf die Ordnung ihres Zusammenhanges zu charakterisiren, was zuerst Riemann gethan hat.

Zusammenhängend heissen aus einer Ebene geschnittene Theile, wenn sie ein Stück bilden, so dass man von jedem Puncte darin zu jedem andern gelangen kann, ohne die Begrenzung zu überschreiten.

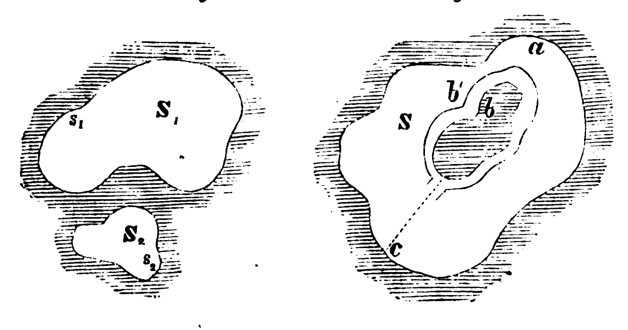
Einfach zusammenhängend heist ein zusammenhängendes Stück der Ebene, wenn es durch jeden Querschnitt, d. h. eine zwei Puncte der Begrenzung verbindende oder in sich zurücklaufende Linie, in getrennte nicht zusammenhängende Stücke zerlegt wird.

Zweifach zusammenhängend heisst ein zusammenhängendes Stück der Ebene, wenn es durch einen Querschnitt in ein einfach zusammenhängendes Stück zerlegt werden kann.

In mehrfach zusammenhängenden Stücken sind mehr nicht zerstückende Querschnitte möglich.

Einfach zusammenhängend ist z. B. die Fläche einer Ellipse, Zweifach zusammenhängend das ringförmige Stück zwischen zwei concentrischen Kreisen. Verbindet man die beiden Kreise durch eine Gerade, und rechnet die beiden Ufer derselben der Begrenzung hinzu, so ist das Stück einfach zusammenhängend.

Die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Stückes besteht aus einem einzigen continuirlichen Zuge.



Beständе sie nämlich aus getrennten Zügen, wie in S aus a und b, oder wie in S_1 und S_2 (wenn man diese als etwas Zusammengehöriges ansieht) aus s_1 und s_2, so ist entweder eine in den begrenzten Theilen verlaufende Verbindungslinie dieser Begrenzungen nicht möglich, wie in (S_1', S_2), dann ist nach der Definition des Zusammenhanges das Stück überhaupt nicht zusammenhängend, oder eine solche Linie ist möglich, wie in S die punctirte Linie c. Dann zerstückt aber die Linie c das Ebenenstück S nicht, und dieses ist zweifach zusammenhängend. Um dies zu beweisen ist nur nöthig zu zeigen, dass, wenn eine Verbindungslinie zweier Puncte durch die Linie c in getrennte Stücke zerlegt wird, dadurch die Verbindung dieser Puncte nicht überhaupt zerstört ist. Nun führen aber die beiden Stücke auf die verschiedenen Ufer der Linie c. Die Verbindung der beiden Ufer ist jedoch dadurch noch hergestellt, dass die Linie a oder b von einem Ufer derselben auf das andere führt, also auch eine a oder b sehr nahe laufende (wie etwa in der Zeichnung b') die nun nicht blos Begrenzung von S ist, sondern ganz darin liegt.

Eine einfach zusammenhängende Fläche kann auch unbegrenzt sein wie z. B. die Oberfläche einer Kugel. Für ein ebenes Stück gilt der Satz, dass es einfach zusamaenhängend ist, wenn die Begrenzung nur aus einem Stück besteht.

Jede Function von y und z kann als Function der complexen Variabeln x, oder, wie man sagt, der x-Ebene angesehen werden, weil durch Angabe der complexen Zahl $x = y + zi$ die beiden reellen Grössen y und z vollkommen bestimmt sind. *Allein wir nennen eine Function der complexen Veränderlichen x eine Function ω von y und z nur in einem solchen Gebiete, in welchem sie der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{i.\partial\omega(y, z)}{\partial y} = \frac{\partial\omega(y, z)}{\partial z}$$

Genüge leistet, wovon nur in einzelnen Puncten und Linien Ausnahmen stattfinden dürfen. Aber es muss in solchen Ausnahmefällen diese Differentialgleichung noch bestehen bleiben, wie nahe auch der Punct y, z an die ausgeschlossenen Stellen gerückt wird, oder die Ausnahmen dürfen in keinem noch so kleinen Flächentheile stattfinden. Ausserdem wird stets vorausgesetzt, dass eine Function der complexen Veränderlichen x keine durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Puncten hebbare Unstetig-

keiten besitzt, wie z.B. wenn sie für alle Werthe von x den Werth 1, für $x = 0$ aber den Werth 0 hätte, *und dass sie keine durch Abänderung ihrer Werthe längs einzelner Linien hebbare Unstetigkeiten besitzt,* wie z. B, wenn sie überall den Werth 0, längs der Strecke der reellen Achse von 1 bis 2 aber den Werth 3 hätte. Hingegen ist nicht ausgeschlossen, dass sie durch Annäherung der Variabeln y, x an einzelne Puncte in verschiedene Richtungen verschiedene Werthe erhalte, wie $e^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle $x = 0$.

Setzen wir in einer solchen complexen Function $y = x - zi$, und differenziren dann nach z, so haben wir

$$\frac{d}{dz} = \frac{\partial\omega}{\partial y}.(-i) + \frac{\partial\omega}{\partial z}, \text{ also } \frac{d\omega}{dz} = 0,$$

d. h. es ist ω ganz unabhängig von z und enthält nur die Grösse x. Diese Schlussweise ist jedoch nur so lange richtig, als ω eine Function von y und z ist, die auch dann einen Differentialquotienten besitzt, wenn als Zuwachs der Variabeln imaginäre Grössen zugelassen werden, weil die Variabele $y = x - zi$ einen imaginären Zuwachs erfährt, wenn z um etwas Reelles geändert wird. Dies wird in der Differentialrechnung nur für die durch convergente Potenzreihen dargestellten Functionen bewiesen, und kann daher nicht auf Functionen ausgedehnt werden, von denen eine solche Darstellbarkeit nicht vorausgesetzt ist. Die allgemeine Giltigkeit des Satzes folgt jedoch aus den fundamentalen Sätzen der Theorie der complexen Functionen, die den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden.

Die Functionen einer complexen Veränderlichen x werden also hier als Functionen zweier reellen Veränderlichen y und z angesehen, und sind einer Differentialgleichung und gewissen Stetigkeitsbedingungen unterworfen. Da unter einer Function in den Elementen der Analysis zumeist die Abhängigkeit einer Grösse von einer oder mehreren anderen verstanden wird, insofern die erste durch einen analytischen Ausdruck der andern gegeben ist, so pflegt der Anfänger in Bezug auf diesen Begriff Vorurtheile mitzubringen, welche es nicht überflüssig erscheinen lassen, den allgemeineren Begriff einer Function einer oder zweier unabhängiger Veränderlichen hier eingehender zu besprechen, namentlich die möglichen Unstetigkeiten solcher Functionen in Betracht zu ziehen. Glaubten doch noch die Mathematiker des vorigen

Jahrhunderts, eine Function einer (reellen) Veränderlichen lasse sich nur auf eine Weise stetig fortsetzen, und hielten es deshalb nicht für möglich eine Abhängigkeit durch ein mathematisches Gesetz darzustellen, wie die Abhängigkeit der Ordinate einer gebrochenen Linie von der Abscisse, bis sie durch die Fourier'sche Reihe eines andern belehrt wurden.

Hier wird nun jede Grösse ω, die in einem bestimmten Gebiete für alle Werthe der unabhängigen Veränderlichen y und z gegeben ist, oder wenigstens bestimmt werden kann, sei es durch Rechnung, sei es (in der angewandten Mathematik) durch Messung, als Function von y und z angesehen. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass sie bei nur einer Veränderlichen in einzelnen Puncten (d. h. für einzelne Werthe der Veränderlichen), bei zwei Veränderlichen auch in einzelnen Linien unbestimmt sei. So ist z. B. die Function $\operatorname{arc\,tg}(y:z)$, wenn man voraussetzt, dass sie für $z=0$, $y \gtreqless 0$, Null sei, und nur spitze positive oder negative Winkel zugelassen werden, überall bestimmt, nur im Puncte $x=0$, $y=0$ unbestimmt.

Eine Function $\omega(y)$ der reellen Veränderlichen y heisst stetig in einem Intervalle von $y=a$ bis $y=b$, wenn $\omega(y \pm \zeta\delta) - \omega(y)$ für jeden Punkt y im Innern dieses Intervalles dadurch dem absoluten Betrage nach kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse gemacht werden kann, dass man δ klein genug, jedoch von Null verschieden nimmt, was für eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl ζ auch sein mag. An den Grenzen a und b kommt natürlich nur eins der beiden Vorzeichen $\pm$ in Betracht. Die Werthe der Function $\omega(y)$ können complex sein, wenn auch y als reell vorausgesetzt wird. Es kann nun, was Herr E. Heine zuerst gethan hat, die Frage aufgeworfen werden, ob eine zwischen a und b stetige Function immer so stetig sein muss, dass wenn eine beliebig kleine Grösse σ vorgegeben ist, auch eine bestimmte Zahl δ angegeben werden kann, so dass durchgehend für alle y zwischen a und b $\operatorname{abs}[\omega(y \pm \zeta\delta) - \omega(y)] \leqq \sigma$ sei. Diese Frage muss, wie leicht zu sehen, bejaht, für die Grenzen a und b selbst jedoch verneint werden.

Ist nämlich y_1 eine Zahl $> a$, wie wenig sie auch davon verschieden sein mag, so giebt es ein δ_1 von der Beschaffenheit, dass $\operatorname{abs}[\omega(y_1 \pm \zeta\delta_1) - \omega(y_1)] \leqq \frac{1}{2}\sigma$ ist nach der Voraussetzung. Im Puncte $y_2 = y_1 + \delta_1$ giebt es ebenso ein solches bestimmtes δ_2, dass $\operatorname{abs}[\omega(y_2 \pm \zeta\delta_2) - \omega(y_2)] \leqq \frac{1}{2}\sigma$ ist; im Punkte $y_3 =$

$y_2+\delta_2$ ein δ_3, so dass abs$[\omega(y_3\pm\zeta\delta_3)-\omega(y_3)]\overline{\overline{<}}\frac{1}{8}\sigma$ ist etc. etc.; im Punkte $y_n=y_{n-1}+\delta_n$ ein δ_n, so dass abs$[\omega(y_n\pm\zeta\delta_n)-\omega(y_n)]$ $\overline{\overline{<}}\frac{1}{8}\sigma$ ist. Ist nun δ der kleinste von den Werthen $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$, so ist offenbar für alle y zwischen y_1 und y_n abs$[\omega(y+\zeta\delta)-\omega(y)]$ $\overline{\overline{<}}\sigma$, weil $y+\delta$ und y entweder zugleich in einem der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ oder in zwei aufeinanderfolgenden liegen müssen. Lässt man nun n wachsen, so dehnt sich das Intervall y_1 bis y_n nach und nach bis über jede Zahl zwischen a und b hinweg aus, wenn die δ sämmtlich endlich, d. h. oberhalb einer bestimmten noch so kleinen Zahl ε bleiben. Oder y_n geht über eine bestimmte zwischen a und b gelegene Zahl c nicht hinaus, dann müssen mit wachsenden n die δ_n nothwendig kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse werden, und y_n muss sich, da es jedenfalls kleiner als c ist und immer wächst, einer bestimmten Zahl g zwischen y_1 und c (c eingeschlossen) immer mehr nähern. Da aber der Voraussetzung nach für $y=g$ selbst eine kleine aber bestimmte Grösse δ' so angebbar ist, dass abs$[\omega(g\pm\zeta\delta')-\omega(g)\overline{\overline{<}}\frac{1}{8}\sigma$ ist, was für eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl ζ auch sein mag, so können sich offenbar die Werthe von $\omega(y)$ in dem Intervall von $g-\delta'$ bis $g+\delta'$ für zwei um δ' oder weniger von einander verschiedene Werthe von y nicht um mehr als um $\frac{1}{8}\sigma$ unterscheiden, und es ist unmöglich anzunehmen, dass δ_n unter jede noch so kleine Grösse herabsinken müsste, wenn y_n sich der Zahl g immer wachsend nähert; denn sobald y_{n-1} die Zahl $g-\delta'$ überschritten hat, braucht δ_n nicht mehr kleiner als δ' zu sein. Da also die $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ nicht unter jede Grösse ε bei der Voraussetzung der Stetigkeit sowohl für ab- als für zunehmende y in jedem Puncte zwischen y_1 und c (diese Grenzen eingeschlossen) herabzusinken brauchen, so ist die Anzahl der Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ oder der Grössen $y_1, y_2, \dots y_n$, wenn $y_n \overline{\overline{>}} c$ aber $< b$ werden soll, immer eine bestimmte endliche und es giebt deshalb eine kleinste δ unter ihnen, welche die Eigenschaft besitzt, dass zwischen y_1 und c durchgehend $[\omega(y\pm\zeta\delta)-\omega(y)]\overline{\overline{<}}\sigma$ ist.

Anders verhält es sich jedoch, wenn y_1 auf a, oder c auf b fallen soll, und wenn über die Fortsetzung der Function ω über diese Puncte hinaus nicht vorausgesetzt werden kann, ob sie stetig oder nicht stetig sei. Denn offenbar, wenn y sich dem Werthe b unaufhörlich nähert, so dass $b-y<\varepsilon$ ist, so muss δ ebenfalls

kleiner als ε genommen werden, damit abs$[\omega(y+\delta)-\omega(y)] < \delta$ werde, weil für $\delta > \varepsilon$ über $\omega(y+\delta)$ gar nichts ausgesagt werden kann. Aber ε kann beliebig klein angenommen werden.*)

---

*) Für manche Untersuchungen ist es nützlich den Grad der Stetigkeit einer Function zu messen. Lässt sich nämlich eine Zahl α von der Beschaffenheit finden, dass für abnehmende δ $\lim[\omega(y+\delta)-\omega(y)] : \delta^{\alpha}$ einer endlichen von 0 verschiedenen Zahl A gleich wird, so kann α das Maass der Stetigkeit an jener Stelle genannt werden. Es bilden dann diese Maasse der Stetigkeit, oder was dasselbe ist, die Ordnungen des Verschwindens einer Function, ein stetiges Grössengebiet einer Ausdehnung (conf. Riemann „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" pag. 3. § 1) welches unendlich viel dichter ist, als das Gebiet der in dieser Mannigfaltigkeit mit enthaltenen gemeinen reellen Zahlen, wenn man die Ordnung δ als Maasseinheit der Ordnungen nimmt, so dass δ^{μ} die μte Ordnung ist, und diese Ordnung ein bestimmtes Einzelnes in dieser Mannigfaltigkeit bedeutet. Lassen wir diese Ordnung der Zahl μ entsprechen, so entspricht die Ordnung von $\frac{1}{\lg \delta}$ einer Zahl, die kleiner als jede angebbare Zahl und doch die Null nicht ist, d. h. im gemeinen Zahlengebiete keiner Zahl. Man kann sie mit lg bezeichnen. Ebensowenig entsprechen, $\lg\lg, \ldots \lg^m$ einer Zahl, wenn $\lg\lg$ Zeichen für die Ordnung des Verschwindens der Function $\frac{1}{\lg\lg\delta}$ ist.

Bezeichnet man allgemein die Ordnung von

$$\delta^{\alpha}\cdot\frac{1}{(\lg\delta)^{\beta}}\cdot\frac{1}{(\lg\lg\delta)^{\gamma}}\cdots\frac{1}{(\lg^m\delta)^{\mu}} \quad \text{mit} \quad \alpha+\beta\lg+\gamma\lg\lg+\ldots\mu\lg^m,$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ gewöhnliche reelle Zahlen sind, so findet in diesem Zahlengebiete, — wenn dieser Name gestattet ist, ein deutliches Aussereinander statt. Dividirt man zwei Functionen, die in verschiedenen Ordnungen verschwinden, durcheinander, so wird man diejenige Ordnung die höhere nennen, welche der Zählerfunction angehört, wenn der Quotient noch mit δ zu Null herabsinkt, und wenn der Quotient mit herabsinkendem δ endlich und von 0 verschieden bleibt, so wird man die Ordnungen gleiche nennen. Demnach ist von den zwei Zahlen $\alpha+\beta\lg+\gamma\lg\lg+\ldots\mu\lg^m$, $\alpha'+\beta'\lg+\gamma'\lg\lg+\ldots\mu'\lg^{m'}$ die erste die grössere, wenn die erste der Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$, …, welche nicht verschwindet, eine positive gewöhnliche Zahl ist.

Da sich die Ordnung $\lg\lg$ zur Ordnung lg genau so verhält, als die Ordnung lg zu der Ordnung 1, so hat man $\lg\lg : \lg = \lg : 1$ oder $\lg\lg = \lg . \lg$, woraus sich für die Multiplication zweier solcher Zahlen die Regel ergiebt:

$$(\alpha+\beta\lg+\gamma\lg\lg+\ldots)(\alpha'+\beta'\lg+\gamma'\lg\lg+\ldots) = \alpha\alpha'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\lg+(\alpha\gamma'+\beta\beta'+\alpha'\gamma)\lg^2+\ldots$$

Dies Zahlengebiet kann sofort eine zweite Ausdehnung erhalten, wenn

Eine Function einer Veränderlichen kann nun in verschiedener Weise unstetig werden, und es ist nützlich sich die verschiedenen Arten näher zu betrachten.

Eine Function, die in keinem Puncte (d. h. für keinen Werth von y) stetig ist, ist z. B. die Function ω, welche für alle rationalen Werthe von y den Werth 1, für alle irrationalen Werthe von y den Werth 0 hat. Eine solche Abhängigkeit unter den Begriff der Function aufzunehmen, erscheint dem Anfänger meist ganz überflüssig, indem es den Anschein hat, als liesse sich die Infinitesimalrechnung nicht auf solche Functionen anwenden, und es könne keine analytischen Darstellungen für dieselben geben. Allein Riemann hat in seiner Schrift über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Göttingen 1867) gezeigt, dass man unendlich viele Functionen bilden kann, die in einem Intervalle unendlich oft unstetig werden, und welche gleichwohl einer Integration fähig und durch trigonometrische Reihen darstellbar sind, wozu jedoch die eben gebildete nicht gehört; wohl aber z. B. die Function, die von 1 bis $\frac{1}{2}$ den Werth $\frac{1}{2}$, von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$ den Werth $\frac{1}{3}$, etc. von $\frac{1}{n}$ bis $\frac{1}{n+1}$ den Werth $\frac{1}{n+1}$ hat, für $y=\frac{1}{2}$ aber gleich $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$, für $y=\frac{1}{3}$ gleich $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$ ist etc. und so zwischen 0 und 1 völlig bestimmt ist.

Eine Function kann dadurch unstetig werden, dass sie zwar im Allgemeinen stetig ist, aber an einzelnen Stellen sich sprungweise, d. h. um eine endliche Grösse ändert. Z. B. eine Function ω, die von 0 bis α, den Werth α ausgeschlossen, gleich 0 ist, von α bis β, β ausgeschlossen, gleich 1 ist, von β bis γ, γ ausgeschlossen, gleich 0 ist, von γ bis δ, δ ausgeschlossen, gleich 1 ist, etc. Eine solche Function lässt sich, beiläufig bemerkt, durch bestimmte Integrale oder trigonometrische Reihen darstellen, ausgenommen in jenen Unstetigkeitsstellen selbst, indem die so dargestellte Function in den Puncten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ den Werth $\frac{1}{2}$ (den Mittelwerth zwischen dem unmittelbar voraufgehenden und nach-

---

man für $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ complexe Zahlen zulässt, dann unterscheiden sich die zu diesen complexen Zahlen gehörenden Ordnungen von den reellen dadurch, dass die zu den ersten gehörenden Functionen da, wo ihre Stetigkeit gemessen wird, oder wo sie verschwinden, unendlich viele Maxima und Minima haben, und die zu den letzteren gehörenden nicht·

folgenden Werthe der Function ω) hat. Es gibt jedoch auch Mittel die Function überall genau durch analytische Ausdrücke darzustellen.

Die eben gebildete Function ist noch deshalb merkwürdig, weil sie für jedes y zwischen 0 und einer der Grössen γ oder $\delta, \ldots$ einen Differentialquotienten besitzt (er ist nämlich Null), wenn man unter $\omega'(y)$ den Grenzwerth $[\omega(y+h)-\omega(y)]:h$ für abnehmende h versteht und h nur positiv nimmt. Denn in der That für $y=\alpha$ ist $[\omega(\alpha+h)-\omega(\alpha)]:h=(1-1):h=0$ und wenn y kleiner als α ist, wie nahe es auch an α liegen möge, so kann man doch h so klein nehmen, dass $\omega(y+h)=0$ und mithin $[\omega(y+h)-\omega(y)]:h=0$ ist. Dasselbe gilt für $\beta, \gamma, \ldots$ in ähnlicher Weise. In dem Beweise nun, dass eine Function ω in einem Intervall constant sei, in welchem ihr Differentialquotient Null ist (z. B. Sturm Cours d'analyse pag. 21 oder 361) werden die Differentialquotienten nur als Grenzwerthe $\omega(y+h)-\omega(y):h$ für positive abnehmende h angesehen, und es muss dieser Beweis mithin falsch sein, da wir eben eine Function ω construirt haben, die in dem Intervall von 0 bis zu einer der Grössen $\gamma, \delta, \ldots$ nicht constant ist, während der in besagter Weise gebildete Differentialquotient darin überall Null ist. Jener Beweis setzt nämlich voraus (was jedoch nirgend erwähnt wird), dass man in dem Intervall, in welchem $\lim[\omega(y+h)-\omega(y)]:h$ Null ist, für jede noch so kleine vorgegebene Grösse σ eine bestimmte Zahl δ finden könne*), unter welche für alle y, abgesehen von der oberen Grenze, durchgehend h nicht herabzusinken braucht, damit $\text{abs}[\omega(y+\zeta h)-\omega(y)]:\zeta h<\sigma$ wird (für alle ζ zwischen 0 (excl.) bis 1 (incl.)), was bei unserer Function neben den Stellen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nicht der Fall ist. Diese Function ist eine unstetige, ob es auch eine stetige nicht constante Function geben kann, deren nur in positiver Richtung gebildeter Differentialquotient überall 0 ist, bleibt dahin gestellt, das Gegentheil ist meines Wissens noch nicht bewiesen. Wir wollen hier aber zeigen, dass bei einer Function, von der in einem bestimmten Intervall nicht blos der in positiver Richtung gebildete

*) Das Verdienst, hierauf aufmerksam gemacht zu haben, gebührt wohl Herrn Weierstrass.

Dieselbe Voraussetzung muss auch gemacht werden, damit der Satz

$$\omega(y+h)=\omega(y)+h[\omega'(y+\zeta h)-\omega'(y)]$$

bestehe.

Differentialquotient d. h. $\lim [\omega(y+h) - \omega(y)] : h$, sondern auch der in negativer Richtung gebildete d. h. $\lim [\omega(y-h) - \omega(y)] : h$ Null ist, von selbst der Forderung Genüge leiste, dass eine bestimmte Grösse δ gefunden werden kann, unter welche h nicht herabzusinken braucht, damit $\text{abs}[\omega(y+h\zeta) - \omega(y)] : \zeta h < \sigma$ werde, ausgenommen an der oberen Grenze des Intervalles. Diese obere Grenze braucht nicht ausgenommen zu werden, wenn dort noch ein in positiver Richtung gebildeter Differentialquotient existirt, was hier vorausgesetzt werden mag.

Das Intervall, in dessen Innern und an dessen Grenzen die Function $\omega(y)$ einen in positiver und negativer Richtung gebildeten Differentialquotienten besitzen soll, umfasse die Werthe der Veränderlichen y von a bis b. Es liege ζ immer zwischen 0 und 1, 0 ausgeschlossen, 1 eingeschlossen. Nimmt man h_1 so klein, dass $\text{abs}[\omega(a+\zeta h_1) - \omega(a)] : \zeta h_1 < \frac{1}{2}\sigma$ wird, was nach der Voraussetzung möglich ist, und h_2 so klein, dass $\text{abs}[\omega(a+h_1+\zeta h_2) - \omega(a+h_1)] : \zeta h_2 < \frac{1}{2}\sigma$ wird, dann h_3 so klein, dass $\text{abs}[\omega(a+h_1+h_2+\zeta h_3) - \omega(a+h_1+h_2)] : \zeta h_3 < \frac{1}{2}\sigma$ wird, etc., h_{n+1} so klein, dass $\text{abs}[\omega(a+h_1+h_2+\ldots+h_n+\zeta h_{n+1}) - \omega(a+h_1+h_2+\ldots+h_n)] : \zeta h_{n+1} < \frac{1}{2}\sigma$ wird und ist δ eine Grösse, welche jedenfalls nicht grösser als die kleinste der Grössen $h_1, h_2, \ldots h_{n+1}$ ist, so ist in dem ganzen Intervall von a bis $a+h_1+h_2+\ldots+h_n$ $\text{abs}[\omega(y+\zeta\delta) - \omega(y)] : \zeta\delta < \sigma$, weil $y+\zeta\delta$ und y entweder in eins, oder in zwei aufeinanderfolgende der durch $h_1\, h_2 \ldots h_{n+1}$ gebildeten Intervalle hineinfallen. Lässt sich nun ein so grosses n angeben, dass $a+h_1+h_2+\ldots h_n \geqq b$ wird, so ist die gestellte Forderung erfüllt. Wenn aber mit wachsendem n $a+h_1+h_2+\ldots+h_n$ immer kleiner als b bleibt, so müssen die $h_1\, h_2 \ldots$ von einem bestimmten ab offenbar kleiner und kleiner werden, und es nähert sich dann $a+h_1+h_2+\ldots+h_n$ mit wachsendem n einer bestimmten Zahl $c \leqq b$ unendlich, weil dieser Ausdruck fortwährend wächst. Der Voraussetzung nach existirt aber eine bestimmte Zahl h' von der Art, dass $\text{abs}[\omega(c \pm h'\zeta) - \omega(c)] : \zeta h' < \frac{1}{2}\sigma$ ist. Es braucht deshalb, wenn $a+h_1+h_2+\ldots+h_m$ $c-h'$ überschritten hat, das folgende h_{m+1} nicht unter h' herabzusinken, damit

$$\frac{\text{abs}[\omega(a+h_1+h_2+\ldots+h_m+\zeta h_{m+1}) - \omega(a+h_1+h_2+\ldots+h_m)]}{\zeta h_{m+1}}$$

$< \frac{1}{2}\sigma$ wird. Es ist also unmöglich anzunehmen, dass die h_m

zuletzt unendlich klein werden müssten, damit sich $a+h_1+h_2+\ldots$ $\ldots+h_m+\ldots+h_n$ der Zahl $c \leqq b$ nähere. Da man also immer nur eine endliche Anzahl Grössen $h_1, h_2, h_3 \ldots$ zu bilden braucht, damit $a+h_1+h_2+\ldots+h_n \geqq b$ ist, so ist die gestellte Forderung immer erfüllt, weil dann ein kleinstes h vorhanden sein muss.

Existirt an der Grenze b nur ein in negativer Richtung gebildeter Differentialquotient, so könnte c nicht $= b$ genommen werden. Denn wenn y sich b nähert, so dass es um weniger als ε davon verschieden ist, so muss auch $h < \varepsilon$ genommen werden, damit $\operatorname{abs}[\omega(y+\zeta h)-\omega(y)] : \zeta h < \sigma$ werde, und ε kann kleiner und kleiner gemacht werden. Es ist aber auch in diesem Fall $\omega(b)$ noch gleich $\omega(a)$, weil die Function bis zu b hin (b eingeschlossen) stetig sein muss, da eben $\omega(b-h)-\omega(b)$ mit abnehmendem h gegen Null convergirt.

Demnach kann der Satz unbedenklich ausgesprochen werden: *Eine Function $\omega(y)$, deren in positiver und negativer Richtung gebildeter Differentialquotient für jeden Werth von y in dem Intervall von a bis b Null ist, ist in diesem Intervalle constant.*

Eine andere Art von Unstetigkeit einer Function $\omega(y)$ ist die, wenn $\omega(y)$ nur im Allgemeinen stetig ist, aber für einzelne specielle Werthe von y einen Werth annimmt, der in die Continuität nicht hineinpasst. Z. B. wenn man eine Function $\omega(y)$ bildet, die zwischen 0 und 1 überall gleich y oder constant etwa gleich $\frac{1}{2}$ ist, für $y=\frac{1}{2}$ aber den Werth 1 hat, so kann diese Unstetigkeit durch Abänderung des Werthes in einem einzelnen Puncte (oder wenn mehr vorhanden sind, in einzelnen Puncten) gehoben werden, im Beispiele dadurch, dass man $\omega(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ statt 1 setzt. Ein solcher Werth könnte auch unendlich sein. Herr Seidel hat im 73. Bande des Crell'schen Journals pag. 304 gezeigt, dass eine solche Function sich durch Ausdrücke, die in der Analysis gebräuchlich sind, darstellen lässt. Die Function nämlich

$$\omega(y) = \lim_{n=\infty} \frac{A.n}{y^n+y^{-n}+n}$$

ist für alle $y \lessgtr 1$ gleich 0, und nur für $y=1$ gleich A.

Will man einer Function, die dadurch unstetig wird, dass sie für $y=c$ unendlich wird, eine Ordnung des Unendlichwerdens beilegen, so muss diese Function bei Annäherung von y an c (wenigstens von einer Seite her) nach und nach über alle Grenzen wachsen, und darf nicht für die c unmittelbar voraufgehenden

oder nachfolgenden Werthe einen unter einer endlichen Grenze bleibenden Werth besitzen, und in c allein unendlich sein. Man sagt, die Function werde in μter Ordnung unendlich gross, wenn $\omega(c \pm h).h^{\mu}$ für abnehmende h endlich und von 0 verschieden, oder auch wie die Function $\sin\frac{1}{h}$ zwischen endlichen Grenzen bleibt.*)

Wenn eine Function in einem Puncte c unbestimmt wird, indem ihre Werthe in endlichen oder unendlichen Grenzen unendlich oft hin und her schwanken, während y sich dem Werthe c unaufhörlich nähert, so ist dies wiederum eine Art von Unstetigkeit, wie z. B. für $c = 0$ die Functionen $\sin\frac{1}{y}$ oder $\operatorname{tg}\frac{1}{y}$ oder $y^{\alpha i} = e^{i\alpha \lg y}$ (α reell), $\cos\frac{1}{y} : y^{\alpha}$ sie besitzen. Von einer solchen Function sagt man, sie habe unendlich viele Maxima und Minima. Eine solche Function kann jedoch auch stetig sein, wie die Functionen $y^{\beta}\sin\frac{1}{y}$, $y^{\beta+\alpha i}$ (in denen β positiv reell ist), wenn man voraussetzt, dass sie für $y = 0$ (wo sie durch den mathematischen Ausdruck nicht definirt sind) den Werth Null haben.

Noch mannigfaltiger sind die Unstetigkeiten, die eine Function zweier Veränderlichen besitzen kann. Eine Function zweier Veränderlichen $\omega(y, z)$ heisst stetig in einem Gebiet, wenn in jedem Puncte derselben eine bestimmte Grösse δ gefunden werden kann, so dass $\operatorname{abs}[\omega(y+\zeta\delta,\ z+\zeta'\delta) - \omega(y, z)]$ kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse σ wird für alle reelle ζ, ζ', welche der Bedingung $\zeta^2+\zeta'^2 \leqq 1$ genügen. Geometrisch lässt sich dies so ausdrücken. Wenn $\omega(y, z)$ stetig sein soll, so muss sich um jeden Punct y, z ein so kleiner Kreis schlagen lassen, dass die Werthe der Function am Rande und im Innern des Kreises von dem Werthe im Mittelpunct beliebig wenig verschieden sind. Für die Puncte der Begrenzung des Gebietes, in welchem ω gegeben ist, kommen natürlich nur diejenigen Theile jenes kleinen Kreises in Betracht, welche im Innern oder auf dem Rande des

*) Wenn eine Function wie $\lg y$ oder $(\lg\lg y)^{\mu}$ etc. unendlich wird, so kann man als Maasszahlen der Ordnungen die in der Anmerkung pag. 9 eingeführten Zeichen benutzen.

vorgegebenen Gebietes liegen. Mit denselben Principien, wie bei einer Function einer Veränderlichen, kann man beweisen, dass eine Function, die in jedem Puncte eines Gebietes stetig ist, so stetig ist, dass eine kleine Grösse ε gefunden werden kann, unter welche in dem Ausdrucke abs$[\omega(y+\zeta\delta,\ z+\zeta'\delta)-\omega(y,z)]$ δ nicht herabzusinken braucht, wenn er kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene Grösse σ werden soll, für alle y, z des Gebietes, ausgenommen wenn sich der Punct y, z dem Rande des Gebietes unaufhörlich nähert.

Man verfällt leicht in den Fehler (worauf Herr E. Heine) aufmerksam gemacht hat) in einem Gebiete eine Fnnction zweier Veränderlichen für stetig zu halten, wenn in jedem Puncte abs$[\omega(y\pm\zeta\delta,\ z)-\omega(y,z)]$ und abs$[\omega(y,\ z\pm\zeta'\delta)-\omega(y,z)]$ mit abnehmendem δ gegen Null convergiren. Dann müsste z. B. die Function $\omega(y,z)=\sin 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z}$, welche wir für $z=0$ dadurch definiren, dass wir sie längs der ganzen y-Achse (in der y, z-Ebene) gleich Null annehmen, im Innern des Kreises $y^2+z^2=1$ überall stetig sein. Denn es ist überall $\omega(y,z)$ für ein constantes z eine stetige Function von y, für ein constantes y eine stetige Function von z. Allein sie ist im Puncte $y=0$, $z=0$ unstetig, obgleich $\omega(\zeta\delta,0)-\omega(0,0)=0$ und $\omega(0,\zeta'\delta)-\omega(0,0)=0$ ist. Denn nähert man sich dem Puncte $y=0$, $z=0$ in allen möglichen Richtungen (d. h. hat bei der Annäherung an $y=0$, $z=0$ $y:z$ alle möglichen Werthe), so erhält $\omega(y,z)$ alle möglichen zwischen -1 und $+1$ gelegenen Werthe als Grenzwerthe, während sie für $y=0$, $z=0$ gleich Null angenommen wird.*)

Es reicht zur Stetigkeit einer Function in einem Puncte nicht einmal aus, dass sie in jeder einzelnen Richtung stetig sei. Ich will sogleich an einem Beispiele zeigen, wie versteckt eine Unstetigkeit liegen kann. Stellt man die Function (die Wurzel reell genommen)

$$(\varphi^2-\pi^2)\sqrt[3]{\frac{1}{\varphi}}$$

in dem Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ durch eine trigonometrische

*) Solche Unstetigkeiten können auch bei Functionen vorkommen, die nur durch analytische Ausdrücke definirt sind.

Reihe dar, so erhält man, weil die Function ungerade ist, eine Reihe, die nur die Sinus enthält und die daher mit

$$(\varphi^2-\pi^2)\sqrt[3]{\frac{1}{\varphi}}$$

überall übereinstimmt ausser für $\varphi = 0$, wo sie Null ist. Die so bestimmte Function sei $F(\varphi)$. Dann ist $r^\mu . F(\varphi)$ für $r = 0$ ($y = 0$, $z = 0$) eine unstetige Function, obgleich für ein positives μ kein Winkel φ (Verhältniss $y : z$) angegeben werden kann, für welchen $r^\mu . F(\varphi)$ als Function von r unstetig oder unbestimmt oder für $r = 0$ von r verschieden wäre. Allein man kann nicht um den Punct $y = 0$, $z = 0$ mit einem Radius δ, wie klein er auch sei, einen Kreis ziehen, so dass die Werthe im Innern des Kreises um weniger als eine Zahl ε von Null verschieden sind. Denn wie klein auch δ^μ sein mag, so kann man doch offenbar den Winkel φ positiv oder negativ so klein annehmen, dass $\delta^\mu . F(\varphi)$ jedweden Werth, also auch ε übersteigt, obgleich dieser Ausdruck für $\varphi = 0$ Null ist. Demnach ist die Function als unstetig anzusehen.

Von der Darstellbarkeit der Function $F(\varphi)$ durch eine trigonometrische Reihe kann auch abgesehen werden, sie wurde nur gewählt, damit man sogleich sieht, dass sich solche Functionen der Darstellbarkeit durch analytische Ausdrücke nicht etwa ganz entziehen.

Es kommt häufig vor, dass eine Function längs einer Linie dadurch unstetig wird, dass sie zwar zu beiden Seiten derselben eine vollkommen stetige Function ist, aber auf dem einen Ufer derselben Werthe besitzt, die von den Werthen in denselben Puncten auf dem andern Ufer um ein Endliches verschieden sind, z. B. die Function $\omega(y, z) = y \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y}$. Nehmen wir an, sie habe auf dem Ufer der positiven y-Achse, auf welchem die positiven z liegen, den Werth 0, und dass sie von dort aus in der ganzen yz-Ebene stetig aber nicht über die Achse der positiven y hinweg fortgesetzt werde, so hat sie auf dem negativen Ufer den Werth $2y\pi$. Denn setzt man etwa $y^2+z^2 = a^2$, $y = \sqrt{a^2-z^2}$ und setzt die Function $y \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} = y.\varphi$, von $y = a$, $z = 0$ ($\varphi = 0$) anfangend, stetig fort, indem man dem Kreise $y^2+z^2 = a^2$ in der Richtung von rechts nach links folgt, so

ändert sie sich bei einem ganzen Umgange um diesen Kreis stetig, bis sie theils ab theils zunehmend den Werth $2a\pi$ im Puncte $y = a$, $z = 0$ $(\varphi = 2\pi)$ annimmt.

Einer besondern Erwähnung verdienen noch die Unstetigkeiten, welche durch Abänderung des Werthes der Function in einzelnen Puncten oder in einzelnen Linien gehoben werden können. Ein Beispiel ist die Seidel'sche Function

$$\lim_{n=\infty} \frac{n.\omega(y, z)}{r^n + r^{-n} + n} \quad (r = \sqrt{y^2+z^2}),$$

welche sonst überall Null ist und nur für $\text{abs}(x) = 1$ von Null verschiedene Werthe annimmt.

Wird eine Function $\omega(y, z)$ in einem Puncte unendlich, so misst man die Ordnung des Unendlichwerdens durch diejenige Zahl μ, welche bewirkt, dass für abnehmende h, k sich der Ausdruck $\omega(y \pm h, z \pm k)$ $(\sqrt{h^2+k^2})^\mu$ einem von 0 und ∞ verschiedenen Werthe nähert. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn hierzu nicht in verschiedenen Richtungen (für verschiedene $h : k$) verschiedene μ nothwendig sind, in welchem Falle die Ordnung unbestimmt bleibt. Auch kann es geschehen, dass eine Function bei Annäherung der beiden Variabeln y, z an einen festen Punct auf beliebigen Geraden (also in jeder Richtung) endlich bleibt, bei Annäherung auf einer Curve aber unendlich wird.

Ebensowenig wie eine Function in einem Puncte stetig genannt werden kann, wenn sie als Function von y, während z constant ist, stetig ist, und als Function von z, während y constant ist, stetig ist, ebensowenig kann man sagen, eine Function $\omega(y, z)$ besitze ein Differential $\frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$, wenn die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ existiren. Denn die Function $\omega(y, z) = \sin 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z}$, welche für $y = 0$ überall (auch für $y = 0$, $z = 0$) Null sein soll, hat offenbar für $y = 0$, $z = 0$ die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$. Gleichwohl kann dort von einem Differentiale nicht die Rede sein. Ebensowenig bei der pag. 16 gebildeten Function $r^\mu . F(\varphi)$. Dies wird in den

Lehrbüchern zumeist nicht berücksichtigt.*) Bildet man nämlich das Differential $\omega(y+dy, z+dz)-\omega(y, z)$ und will man dabei Grössen εdy, ηdz vernachlässigen, wenn ε und η mit abnehmenden dy, dz unendlich klein werden, so schreibt man $\omega(y+dy, z+dz)-\omega(y, z) = \omega(y+dy, z+dz)-\omega(y+dy, z) + \omega(y+dy, z)-\omega(y, z) = \omega(y+dy, z+dz)-\omega(y+dy, z) + \frac{\partial\omega(y, z).dy}{\partial y}$. Falsch aber ist es, für $\omega(y+dy, z+dz)-\omega(y+dy, z)$ $\frac{\partial\omega(y, z).dz}{\partial z}$ schreiben zu wollen, was gewöhnlich geschieht. Dieser Ausdruck ist vielmehr gleich $\frac{\partial\omega(y+dy, z)\,dz}{\partial z}$ und nur dann gleich $\frac{\partial\omega(y, z)}{\partial z}$, wenn dieser letzte Ausdruck eine stetige Function ist. Genaueres darüber folgt unten in einem Nachtrag.

Diese Bemerkungen über unstetige Functionen werden im Folgenden genügen, um klar zu machen, welche Beschränkung es ist, wenn von einer Function gefordert wird, dass sie in einem Gebiete stetig sei.

Wird eine Function $\omega(x)$ der complexen Variabeln x durch eine Substitution $x=\varphi(\xi)$ transformirt, und ist $\varphi(\xi)$ eine Function der complexen Variabeln ξ, so ist auch $\omega[\varphi(\xi)]$ eine Function der complexen Variabeln ξ. *Das Wesen einer complexen Function kann gemäss der auf Seite 5 gegebenen Definition so gefasst werden, dass sie überall, einzelne Linien und Puncte ausgenommen, ein Differential besitzt, welches dem complexen Zuwachs dx, dessen absoluter Betrag verschwindend klein, dessen Winkel aber beliebig ist, proportional ist, oder dass sie einen von diesem Zuwachs unabhängigen Differentialquotienten besitzt.* In der That findet dies dann, und nur dann statt, wenn in

$$d\omega(y, z) = \omega(y+dy, z+dz)-\omega(y, z) = \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{i\,\partial z}$$

ist, in welchem Falle

*) Auch der Satz $\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2\omega}{\partial z\,\partial y}$ pflegt zu allgemein ausgesprochen zu werden.

$$d\omega(y, z) = \frac{\partial \omega}{\partial y}(dy + i\,dz) = \frac{\partial \omega}{\partial y}dx = \frac{\partial \omega}{\partial iz}dx$$

ist, so dass man für $\frac{\omega(x+dx)-\omega(x)}{dx}$ einen von dx unabhängigen Werth $\frac{d\omega(x)}{dx} = \omega'(x)$ erhält. Nun ist aber $d\omega[\varphi(\xi)] = \omega[\varphi(\xi+d\xi)] - \omega[\varphi(\xi)]$ und $\varphi(\xi+d\xi)$ nach der Voraussetzung gleich $\varphi(\xi)+\varphi'(\xi)d\xi$, also $d\omega[\varphi(\xi)] = \omega[x+\varphi'(\xi)d\xi]-\omega(x)$, und da nach der Voraussetzung $\omega(x+\alpha+\beta i)-\omega(x) = \omega'(x).(\alpha+\beta i)$ ist, wenn abs$(\alpha+\beta i)$ verschwindend klein ist, so ist $d\omega[\varphi(\xi)] = \omega'(x).\varphi'(\xi)d\xi$, also das Differential proportional $d\xi$. Ob aber eine Function $\omega(x)$, welche nur den Bedingungen auf Seite 5 u. 6 unterworfen ist, immer ein Differential $\frac{\partial \omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \omega}{\partial z}dz$ besitze, kann erst später entschieden werden. Es muss daher in den schon hier gegebenen Sätzen über Substitution vorläufig vorausgesetzt werden, dass man es mit Functionen zu thun habe, die sich durch convergente Potenzreihen darstellen lassen, für welche jene Voraussetzungen bekanntlich zutreffen. Diese Sätze über Substitution werden aber schon hier gegeben, weil sie eine zeitige Einsicht in den Nutzen der Functionen mit complexen Veränderlichen gewähren.

Durch eine solche Substitution $x = \varphi(\xi)$ werden die Puncte der x-Ebene in eine Beziehung gesetzt zu den Puncten der ξ-Ebene. Einer Linie in der x-Ebene entspricht eine Linie in der ξ-Ebene, man kann deshalb die ξ-Ebene eine Abbildung der x-Ebene nennen. Diese Abbildung besitzt die von Gauss zuerst gefundene Eigenthümlichkeit, dass sehr kleine entsprechende Figuren einander ähnlich sind, weshalb man sie eine conforme oder in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung nennt. In der That, sind die Endpuncte zweier sehr kleinen von ξ ausgehenden Strecken $\xi + dr e^{\varphi i}$ und $\xi + dr_1 e^{\vartheta i}$, so sind die Endpuncte der entsprechenden von x ausgehenden Strecken $x+\varphi'(\xi).dr\,e^{\varphi i}$, $x+\varphi'(\xi)dr_1 e^{\vartheta i}$ und wenn $\varphi'(\xi) = Re^{\Theta i}$ gesetzt wird, wird das Verhältniss der Strecken in der x-Ebene $Rdr : Rdr_1 = dr : dr_1$, also gleich dem der entsprechenden Streken in der ξ-Ebene, und der Winkel, den beide einschliessen, $\Theta+\varphi-(\Theta+\vartheta) = \varphi-\vartheta$, also gleich dem, welchen die entsprechenden Strecken in der ξ-Ebene einschliessen. Also sind die

einander entsprechenden sehr kleinen Strecken proportional, die eingeschlossenen Winkel gleich, ausgenommen in den Puncten und Linien, in welchen $\varphi(\xi)$ keinen endlichen oder von $d\xi$ unabhängigen Differentialquotienten hat, oder in welchen dieser Differentialquotient verschwindet, weil die Proportion $Rdr : Rdr_1 = dr : dr_1$ keinen Sinn hat, wenn $R = 0$ ist.

Einfache häufig vorkommende Substitutionen sind

$$x - a = \xi,$$

welche als eine parallele Verschiebung des Coordinatensystems (y, z) angesehen werden kann;

$$x = e^{\varphi i}.\xi,$$

welche eine Drehung des Coordinatensystems um den Winkel φ bewirkt;

$$x = \frac{1}{\xi - a},$$

durch welche die Stelle $x = \infty$ auf den Punct $\xi = a$ bezogen ist.

Setzt man die Puncte der ξ-Ebene (welche Träger der Zahlen $\xi = \eta + \zeta i$ sind) mit den Puncten der x-Ebene (welche Träger der Zahlen $x = y + zi$ sind) durch die Gleichung $x - a = a'\xi$ zu einander in eine Beziehung, so entspricht jedem beliebigen Gebilde der ξ-Ebene ein Gebilde der x-Ebene, welches dem ersten nicht blos in den kleinsten Theilen, sondern vollkommen ähnlich ist. Denn wenn man $a = \alpha + \beta i$, $a' = \alpha' + \beta' i = r'e^{\vartheta' i}$ setzt, und zuerst die ξ-Ebene mit einer Ebene $u\ (= v + wi)$ durch die Gleichung $u = r'e^{\vartheta' i}.\xi$ in Beziehung setzt, und die u-Ebene so auf die ξ-Ebene legt, dass die Achsen zusammenfallen, so entspricht jeder Zahl $\xi = \varrho e^{\varphi i}$ eine Zahl $u = \varrho r' e^{(\vartheta' + \varphi)i}$, also ein Punct, dessen Entfernung vom Anfangspuncte r' mal grösser ist, und ein Winkel, der um ϑ' (von rechts nach links) gedreht ist. Da aber die Vergrösserung der Entfernung und die Drehung für alle Puncte dieselbe ist, so erhält man für jede beliebige Figur in der ξ-Ebene ein zwar vergrössertes und gedrehtes Bild in der x-Ebene, welches aber dem ursprünglichen vollkommen ähnlich ist. Bildet man nun wieder die u-Ebene auf die x-Ebene durch die Gleichung $x = u + a = u + \alpha + \beta i$ ab, und legt die Achsen der x-Ebene auf die der u-Ebene, so erhält man für jeden Punct $u = v + wi$ einen Punct $x = (v + \alpha) + (w + \beta)i$, also einen Punct, der in der Richtung der y-Achse um α, in der Richtung der

z-Achse um β verschoben ist. Da die Verschiebung aller Puncte dieselbe ist, so erhält man in der x-Ebene ein Bild für eine Figur der u-Ebene, welches diesem vollkommen congruent ist. Mithin bildet sich durch die Gleichung $x - a = a'\xi$ eine Figur der ξ-Ebene auf eine Figur der x-Ebene ab, welche derselben ähnlich, und nur vergrössert, gedreht und ohne seine Gestalt zu ändern, verschoben ist, wenn man die Achsen der beiden Ebenen als aufeinander liegend denkt.

Anders verhält es sich bei der Abbildung der ξ-Ebene auf die x-Ebene durch die Gleichung $x = \frac{1}{\xi}$, welche, abgesehen von dem Puncte $\xi = 0$ und $x = 0$, wo von einer Aehnlichkeit nicht die Rede sein kann, nur in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildungen hervorbringt. Dass dies letztere aber wirklich stattfindet, folgt daraus, dass überall (ausser für $\xi = 0$)

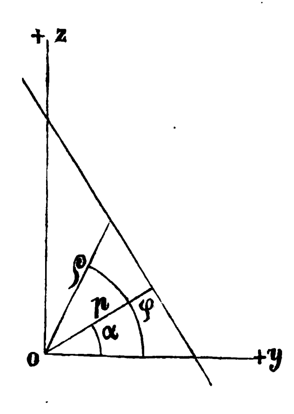
$$\lim_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=0} \left(\frac{1}{\xi+\alpha+\beta i} - \frac{1}{\xi}\right) : \alpha+\beta i = -\frac{1}{\xi^2}$$

ist, unabhängig von dem Verhältnisse, in welchem α und β zu einander stehen, also $\frac{1}{\xi}$ eine Function der complexen Variabeln in dem Sinne ist, wie wir solche Functionen pag. 18 definirt haben. Null ist dieser Differentialquotient nur für $\xi = \infty$ ($x = 0$).

Die Puncte einer Geraden, welche durch den Anfangspunct der ξ-Ebene ($\xi = \varrho\varepsilon^{\varphi i}$) geht, sind durch die Gleichung $\varphi = \varphi_{,}$ bestimmt, in der x-Ebene ($x = re^{\vartheta i}$) entsprechen den Puncten dieser Geraden die Puncte der Geraden $\vartheta = -\varphi_{,}$, weil $x = \frac{1}{\varrho} . e^{-\varphi_{,} i}$ ist. Dem unendlich fernen Punct der einen Geraden entspricht der Anfangspunct der Coordinaten der Ebene der andern Geraden.

Den Puncten eines Kreises, dessen Mittelpunct $\xi = 0$, dessen Gleichung also $\varrho = k$ ist, entsprechen die Puncte des Kreises $r = \frac{1}{k}$ in der x-Ebene. Während aber der Punct in der ξ-Ebene den Kreis k von rechts nach links durchläuft, durchläuft der entsprechende Punct in der x-Ebene den Kreis $\frac{1}{k}$ in der entgegengesetzten Richtung. Den Puncten im Innern des Kreises k entsprechen die Puncte ausserhalb $\frac{1}{k}$ und umgekehrt.

Die Puncte einer beliebigen Geraden sind durch die Gleichung $\varrho \cos(\varphi - \alpha) = p$ bestimmt, wenn p ihre Entfernung vom Ursprung der Coordinaten, und α der Winkel dieses Loths mit der y-Achse ist. Setzt man $r = \frac{1}{\varrho}$, $\vartheta' = -\varphi$, so erhält man die diesen Puncten entsprechenden in der x-Ebene. Sie genügen der Gleichung $\cos(\vartheta + \alpha) = pr$ und liegen mithin auf einem Kreise, der durch den Anfang der Coordinaten geht. Sein Radius ist $\frac{1}{2p}$ und sein Mittelpunct $r = \frac{1}{2p}$, $\vartheta = -\alpha$, diesem entspricht daher in der ξ-Ebene der Punct $\varphi = \alpha$, $\varrho = 2p$.



Den Puncten derjenigen durch die Gerade bestimmten Halbebene, welche den Anfangspunct der Coordinaten nicht enthalten, entsprechen die Puncte im Innern des Kreises in der x-Ebene, den Puncten der anderen Halbebene die Puncte ausserhalb des Kreises. Ebenso entspricht einer Geraden der x-Ebene ein Kreis der ξ-Ebene, welcher durch den Anfang der Coordinaten geht. Aus der Polargleichung eines Kreises, der den Halbmesser d und einen Mittelpunct hat, der um p von dem Anfange der Coordinaten entfernt ist, und bei dem der nach dem Mittelpuncte gezogene Radiusvector den Winkel α mit der y-Achse macht, also aus der Gleichung

$$\varrho^2 - 2\varrho p \cos(\varphi - \alpha) + p^2 - d^2 = 0$$

erkennt man leicht, dass einem Kreise der ξ-Ebene ein Kreis der x-Ebene und umgekehrt entspricht. Schneiden sich zwei Kreise unter einem Winkel ψ, so schneiden sich die entsprechenden unter demselben Winkel etc. (Es empfiehlt sich dergleichen Eigenschaften entsprechender Figuren weiter zu verfolgen.)*)

*) Man kann auch krumme Oberflächen so auf eine Ebene abbilden, dass Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen besteht. Hierher gehört die Abbildung einer Kugeloberfläche auf eine Ebene durch die stereographische Projection. Man projicirt die Puncte einer Kugel durch geradlinige Strahlen von dem einen Endpuncte eines Durchmessers aus in eine Ebene, welche die Kugel im andern Endpuncte des Durchmessers berührt.

Da die Beziehung

$$x = \frac{a + b\xi}{c + d\xi}$$

auf die Form

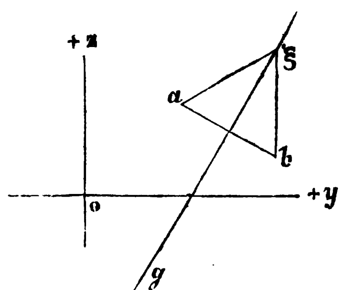
$$x = \frac{b}{d} + \frac{ad - bc}{d^2\left(\xi + \frac{c}{d}\right)}, \quad \text{oder} \quad x - \frac{b}{a} = \frac{ad - bc}{d^2} \cdot \frac{1}{\xi + \frac{c}{d}}$$

gebracht werden kann, so sieht man ein, dass die Abbildung einer Figur der ξ-Ebene in die x-Ebene (oder auch umgekehrt) durch eine successive Abbildung durch reciproke Radiivectores, durch congruente Verschiebung, durch Vergrösserung und Drehung hervorgebracht werden kann. Man kann durch diese Substitution die Aufgabe lösen:

Eine durch eine gerade Linie begrenzte Halbebene auf das Innere eines beliebigen Kreises conform so abzubilden, dass dem Mittelpuncte des Kreises ein beliebiger (nicht auf der Begrenzung liegender) Punct der Halbebene entspricht.

Sind nämlich a, b, c complexe Zahlen und setzt man

$$x = c\frac{\xi - b}{\xi - a}$$



und lässt man ξ diejenige Gerade g durchlaufen, welche auf den Geraden ab senkrecht steht und sie halbirt, so ist

$$\operatorname{abs}\left(\frac{\xi - b}{\xi - a}\right) = 1,$$

weil die Strecke $a\xi$ der absolute Betrag des Zählers, und ξb der des Nenners ist, also ist

$$\operatorname{abs}(x) = \operatorname{abs}(c) . \operatorname{abs}\left(\frac{\xi - b}{\xi - a}\right) = \operatorname{abs}(c),$$

mithin durchläuft x einen um den Anfang der Coordinaten mit dem Radius abs (c) geschlagenen Kreis. Dem Puncte $\xi = b$ entspricht der Mittelpunct $(x = 0)$ und den mit b auf derselben Seite der Geraden g gelegenen Puncten entsprechen die Puncte im Innern des Kreises.

Wir kommen später auf das Problem der Abbildung zurück.

Es bedeute nun im Folgenden, wie wir zur Abkürzung ein- für allemal feststellen, $f(x)$ eine für irgend ein Gebiet eindeutig

bestimmte Function der complexen Variabeln x, die stetig und endlich ist, ausgenommen in einzelnen Puncten $u, u', u'', \ldots$, wo sie so unendlich oder auch nur unstetig wird, dass

$$f(x)(x-u)(x-u')(x-u'')\ldots$$

für $x = u, u', u'', \ldots$ verschwindet, ausgenommen in einzelnen Linien, in denen sie der Differentialgleichung $i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$ zwar nicht Genüge leistet, aber stetig sein soll, und ausgenommen in einzelnen Puncten und Linien, in denen die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ zwar existiren, aber unstetige Functionen von y und z sind, während $f(x)$ jedenfalls stetig ist.

Das Verschwinden der Function $f(x)(x-u)$ im Puncte $x=u$ muss hier so verstanden werden, dass $f(x)(x-u)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als eine noch so kleine vorgegebene Grösse σ gemacht werden kann, ohne dass es nöthig wäre, den absoluten Betrag von $x-u$ unter eine bestimmte (von σ abhängende) kleine Zahl δ herabsinken zu lassen für alle Winkel der Zahl $x-u$. Geometrisch heisst dies, es muss sich um den Punct $x=u$ als Mittelpunct ein Kreis mit einem angebbaren Radius δ ziehen lassen, so dass die Werthe der Function abs$[f(x)(x-u)]$ am Rande und im Innern sich von 0 um weniger als σ unterscheiden.

Die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Ebenenstückes S, welches eine Unstetigkeitsstelle (d. h. eine Stelle, für welche eine in S definirte Function unstetig wird) enthält, deren Gestalt nur der Bedingung unterworfen ist, ausser dieser Unstetigkeitsstelle keine andere einzuschliessen, nennen wir mit Herrn Kronecker die natürliche Begrenzung der Unstetigkeitsstelle.

I. Unter dem Integral einer Function $\omega(x)$ über eine Linie l' zwischen x_0 und x' erstreckt, wenn $\omega(x)$ längs dieser Linie endlich und nur in einzelnen Puncten unstetig ist, verstehen wir den Grenzwerth, gegen welchen die rechte Seite der Gleichung

$$\int \omega(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n}{}_{(\mu)}\, \omega(\xi_\mu) \cdot \Delta x_\mu$$

convergirt, wenn

$$\Delta x_\mu = x_{\mu+1} - x_\mu, \quad \Delta x_n = x' - x_n$$

ist, und $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\mu \ldots x'$ aufeinanderfolgende Puncte der Linie l' (oder vielmehr die Zahlen, deren Träger diese Puncte

sind) bedeuten, und ξ_μ ein beliebiger zwischen $x_{\mu+1}$ und x_μ auf l' liegender Punct ist, und wenn die Δx sämmtlich mit wachsendem n unendlich klein werden. Die durch die Reihenfolge der Puncte $x_0, x_1, \ldots x'$ bestimmte Richtung nennt man dabei die Richtung oder den Sinn der Integration.

Ist die vorgegebene Linie l' ein Stück der y-Achse, so stimmt diese Definition mit der gemeinen des bestimmten Integrals überein.

Ia. *Wenn $\omega(x)$ im Puncte u der Linie l' unendlich wird, so versteht man unter dem Integral $\int \omega(x)\,dx$ über die Linie l' erstreckt den Grenzwerth, welchem sich die Summe zweier Integrale nähert, von denen das eine über den Theil von l' zwischen x_0 und einem Puncte u_1 vor u auf l', und das andere über den Theil zwischen u_2 hinter u auf l' bis zu x' erstreckt wird, wenn u_1 und u_2 dem Puncte u längs l beliebig genähert werden.*

Zusatz. *Das Integral erlangt aber dann einen bestimmten Grenzwerth, wenn $(u_1 - u)^{1-\varepsilon_1}\,\omega(u_1)$ und $(u_2 - u)^{1-\varepsilon_2}\,\omega(u_2)$ durch Annäherung der Puncte u_1, u_2 an u beliebig klein gemacht werden können, wenn ε_1, ε_2 beliebig kleine, aber angebbare positive Zahlen bedeuten. Im andern Falle besitzt das Integral im Allgemeinen keinen endlichen oder bestimmten Werth.*

Ib. *Wenn die Linie l' ins Unendliche verläuft, so versteht man unter dem Integral $\int \omega(x)\,dx$ über l' erstreckt den Grenzwerth, welchem sich das Integral über den Theil der Linie von x_0 bis zu einem Puncte x auf l' nähert, wenn man x auf l' zur Grenze unendlich übergehen lässt.*

Zusatz. *Es nähert sich das Integral dann einem bestimmten Werthe als Grenze, wenn $x^{1+\varepsilon}.f(x)$ dadurch beliebig klein gemacht werden kann, dass man x auf l' weit genug fortrückt, ε als positiv vorausgesetzt.*

II. *Das Integral $\int \omega(x)\,dx$ über eine Linie ist gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Theile der Linie, wenn alle Integrationen in einer und derselben Richtung genommen werden.*

Das Integral $\int \omega(x)\,dx$ über eine Linie in einer Richtung erstreckt ist das Negative des Integrals über dieselbe Linie in entgegengesetzter Richtung erstreckt.

Beide Sätze sind unmittelbare Folgen der Definition des bestimmten Integrals.

Ist der Integrationsweg zwischen x_0 und x' durch analytische Gleichungen bestimmt, so dass etwa $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ gegeben ist, und t eine reelle Veränderliche und φ und ψ zwischen $t = t_0$ und $t = t'$ reelle Functionen sind, so ist das Integral nach der Definition

$$\lim_{n=\infty} \sum_0^n {}_\mu\, \omega[\varphi(t_\mu) + i\psi(t_\mu)].[\varphi(t_{\mu+1}) - \varphi(t_\mu)] + i[\psi(t_{\mu+1}) - \psi(t_\mu)],$$

worin t_μ das dem Puncte x_μ entsprechende t sein soll, und folglich gleich

$$\lim_{n=\infty} \sum_0^n {}_\mu\, \omega[\varphi(t_\mu) + i\psi(t_\mu)]\,[\varphi'(t_\mu) + i\,\psi'(t_\mu)]\,(t_{\mu+1} - t_\mu)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \omega[\varphi(t) + i\psi(t)].[\varphi'(t) + i\,\psi'(t)]\,dt,$$

womit das Integral auf ein gewöhnliches mit einer reellen Veränderlichen zurückgeführt ist, weil ja $\omega[\varphi(t) + i\psi(t)].[\varphi'(t) + i\psi'(t)]$ auf die Form $P(t) + i\,Q(t)$ gebracht werden kann, worin P und Q reelle Functionen sind. Es wird also das Element dx des complexen Integrals durch $[\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt$ ersetzt, und φ', ψ' sind die ersten Differentialquotienten genommen nach t.

Will man z. B. die Function $\omega(x)$ auf dem geradlinigen Wege l' zwischen $x_0 = y_0 + z_0 i$ und $x' = y' + z' i$ integriren, so kann man

$$y = (y' - y_0)\,t + y_0, \quad z = (z' - z_0)\,t + z_0$$

setzen und es ist demnach das über die Linie l' erstreckte Integral

$$\int \omega(x)\,dx =$$

$$\int_0^1 \omega[(y' - y_0)\,t + y_0 + i(z' - z_0)\,t + i\,z_0].[y' - y_0 + i\,(z' - z_0)]\,dt$$

$$= [y' - y_0 + i(z' - z_0)] \int_0^1 \omega[(y' - y_0)\,t + y_0 + i(z' - z_0)\,t + iz_0]\,dt.$$

Oder will man die Integration über den Bogen eines Kreises erstrecken, dessen Radius r und dessen Mittelpunct der Träger der Zahl $a = \alpha + \beta i$ ist, so kann man (ϑ statt t setzend)

$$y - \alpha = r\cos\vartheta, \quad z - \beta = r\sin\vartheta$$

setzen, so ist

$$dx = (-r\sin\vartheta + ir\cos\vartheta)\,d\vartheta = ire^{\vartheta i}\,d\vartheta,$$

und mithin das Integral

$$\int \omega(x)\,dx = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta'} \omega(\alpha + r\cos\vartheta + i\beta + ir\sin\vartheta)\, ri e^{\vartheta i}\, d\vartheta$$
$$= ir \int_{\vartheta_0}^{\vartheta'} \omega(a + re^{\vartheta i}) e^{\vartheta i}\, d\vartheta,$$

wenn die Integration von $y_0 = r\cos\vartheta_0$, $z_0 = r\sin\vartheta_0$ bis $y' = r\cos\vartheta'$, $z' = r\sin\vartheta'$ zu erstrecken ist.

Ist die Integrationscurve l' geometrisch gegeben, so kann man das Element dx geometrisch deuten. Es ist dx die Differenz der Zahlen, welche von zwei Puncten der Linie l' getragen werden, wenn diese Puncte näher und näher an einander rücken. Die Puncte seien $x_{\mu+1}$ und x_μ; so ist die Strecke zwischen $x_{\mu+1}$ und x_μ der absolute Betrag der Differenz $x_{\mu+1} - x_\mu$, und geht also mehr und mehr in das Linienelement dl über, und der Winkel dieser Differenz ist der Winkel, den diese Strecke, zuletzt aber das Linienelement, d. h. die Tangente im Puncte x_μ mit der y-Achse macht. Bezeichnen wir diesen Winkel in einem unbestimmten Puncte der Linie l' mit φ, so ist

$$dx = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,dl.$$

Hieraus geht hervor, dass man Linien mit unendlich vielen Ecken im Allgemeinen als Integrationswege vermeiden muss, weil in denselben sich der Winkel φ und mithin $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ unstetig ändern. Diese Ausschliessung soll hier immer gemacht werden.

Das Integral $\int \omega(x)\,dx$ über eine Linie l' erstreckt, deren Länge von ihrem Anfangspuncte bis zu einem beliebigen mit l bezeichnet wird, ist kleiner, höchstens gleich dem Integral $\int_0^{l'} \text{abs}\,[\omega(x)]\,.\,dl$, weil eine Summe der absoluten Beträge einer Zahlenreihe stets grösser, mindestens gleich dem absoluten Betrage der Summe dieser Zahlen ist.

III. **Satz von Cauchy.** *Das Integral $\int \omega(x)\,dx$ einer Function $\omega(x)$, welche im Innern*) und am Rande eines Stückes S den Charakter einer Function „$f(x)$“ hat, über die ganze Begrenzung des Ebenenstückes S erstreckt, hat den Werth Null.*

Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Function $\omega(x)$

*) Dem Innern wird hier immer nicht blos das Aeussere, sondern auch der Rand entgegengesetzt. Der hier gegebene Beweis des Cauchy'schen Satzes rührt von **Riemann** her.

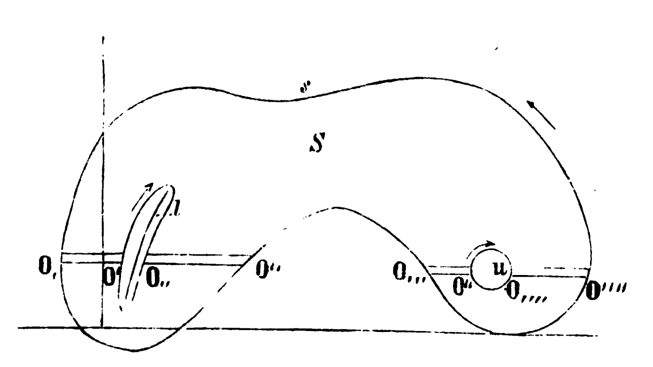
besitze im Innern von S nur einen Punct u, für welchen sie so unendlich oder unstetig wird, wie es dem Charakter einer Function $f(x)$ gemäss ist, und nur eine Linie l, längs welcher sie zwar stetig ist, aber der Differentialgleichung für complexe Functionen nicht genügt oder längs welcher die Differentialquotienten unstetige Functionen sind. Wir scheiden dann aus dem Stück S mittels der natürlichen Begrenzung dieser Stellen sehr kleine Flächenstücke aus und rechnen die äusseren Ufer der beiden natürlichen Begrenzungen der Begrenzung s des übrigbleibenden Stückes S' mit der Gesammtbezeichnung s' hinzu. Setzen wir hierauf $Y = -i\omega(x)$, $Z = \omega(x)$, so ist in S' überall die Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

und demnach auch das über alle Elemente $dy.dz$ des Stückes S' (im ganz gewöhnlichen Sinne eines Flächenintegrals) erstreckte Doppelintegral

$$\int\int\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dy.dz = 0.$$

Um das Integral $\int\int \frac{\partial Y}{\partial y} dy.dz$ zu transformiren, zerlegen wir das Flächenstück S' durch ein System der y-Achse paralleler Linien in Elementarstreifen von der Breite dz. Der Beitrag eines unbestimmten dieser Flächenstreifen zu dem Werthe von $\int\int \frac{\partial Y}{\partial y} dy.dz$ wird dann offenbar $dz \int \frac{dY}{dy} dy$, wenn die Integration über eine der y-Achse parallele Gerade erstreckt wird,



welche dem Flächenstreifen angehört. Tritt nun (in der Richtung der wachsenden y) diese Linie bei $0_{,}$ in die Fläche S ein bei $0'$ aus derselben heraus (in unserer Figur in das um l ausgeschiedene Stück ein), bei $0_{,,}$ wieder ein, bei $0''$ aus u. s. w. bei $0_{,,,}$, $0'''$,..., und sind die Werthe von Y dort bez. $Y_{,}$, Y', $Y_{,,}$, Y'', $Y_{,,,}$, Y''',..., und bezeichnen wir mit $ds_{,}$, ds' $ds_{,,}$, ds'', etc. die Stücke der Begrenzung s', welche der betrachtete Elementarstreifen aus ihr herausschneidet, und die Winkel, welche diese mit der y-Achse machen, mit $\varphi_{,}$, φ', $\varphi_{,,}$, φ'',..., wobei s' (immer in derjenigen Richtung zu nehmen ist, bei der das begrenzte Stück S' zur Linken bleibt, so liegen offenbar diese Winkel im dritten und vierten Quadranten bei $0_{,}$ $0_{,,}$ $0_{,,,}$,..., im ersten und zweiten bei $0'$, $0''$, $0'''$,..., so dass

$$dz = -\sin\varphi_{,}\, ds_{,} = -\sin\varphi_{,,}\, ds_{,,} = -\sin\varphi_{,,,}\, ds_{,,,} = \ldots$$
$$= \sin\varphi'\, ds' = \sin\varphi''\, ds'' = \sin\varphi'''\, ds''' = \ldots$$

ist. Ferner ist

$$\int \frac{\partial Y}{\partial y} dy = \begin{array}{l} Y' + Y'' + Y''' + \ldots \\ -Y_{,} - Y_{,,} - Y_{,,,} - \ldots \end{array}$$

und also

$$dz \int \frac{\partial Y}{\partial y} dy = \sum Y \sin\varphi\, ds,$$

worin sich die Summation auf alle Begrenzungselemente bezieht, welche von dem betrachteten Elementarstreifen aus s' ausgeschnitten werden. Durch die Integration über sämmtliche Elementarstreifen wird nun das Integral $\int\int \frac{\partial Y}{\partial y} dy\, dz$ erhalten, und die rechte Seite der erlangten Gleichung verwandelt sich in $\int Y \sin\varphi\, ds$, worin die Integration über die ganze Begrenzungslinie s' zu erstrecken ist.

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man

$$\int\int \frac{\partial Z}{\partial z} dz\, dy = -\int Z \cos\varphi\, ds$$

und folglich

$$\int\int \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dy\, dz = -\int (Z\cos\varphi - Y\sin\varphi)\, ds = 0.$$

Und demnach endlich

$$\int (Z\cos\varphi - Y\sin\varphi)\, ds = \int \omega(x)(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, ds$$
$$= \int \omega(x)\, dx = 0,$$

worin die Integration über s', also über die ganze Begrenzung s von S und in entgegengesetzter Richtung über die natürliche Begrenzung von u und l zu erstrecken ist.

Ueber die Gestalt der natürlichen Begrenzung von u und l sind keine Bestimmungen getroffen. Der Werth des Integrals $\int \omega(x)dx$ genommen über die ganze Begrenzung s von S, welcher nach dem eben Bewiesenen gleich ist der Summe der Integrale über die natürlichen Begrenzungen von u und l in derselben Richtung genommen, ändert sich nicht, wie wir auch diese Begrenzungen gestalten mögen.

Um das Integral über die natürliche Begrenzung von u auszuwerthen, wählen wir für dieselbe einen Kreis, dessen Radius r beliebig klein genommen werden kann. Setzen wir $x-u= r.e^{\vartheta i}$, so ist ein Element dx der Peripherie $ire^{\vartheta i}d\vartheta$, und das Integral über die Peripherie

$$\int \omega(x)\,dx = i\int_0^{2\pi} r.\omega(u+re^{\vartheta i})\,e^{\vartheta i}d\vartheta,$$

verschwindend klein, weil r beliebig klein genommen werden kann und voraussetzungsmässig $r.\omega(u+re^{\vartheta i})$ mit r verschwindet. Also ist das Integral über die natürliche Begrenzung von u kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse, also Null.*)

Ebenso ist das Integral über die natürliche Begrenzung der Linie l Null, weil diese Begrenzung beliebig nahe an die beiden Ufer von l gebracht werden kann, so dass die Integration über Linien, die den beiden Ufern von l parallel sind, in entgegengesetzter Richtung zu erstrecken ist. Es liefern aber die beiden gegenüberliegenden parallelen Begrenzungsstücke einen Beitrag von beliebiger Kleinheit, weil voraussetzungsmässig $\omega(x)$ längs l stetig ist,**) mithin

*) Dass eine Zahl, deren absoluter Betrag kleiner als jede noch so klein vorgegebene Grösse ist, Null ist, kann nicht bewiesen werden, sondern ist eine Annahme, auf der namentlich das Rechnen mit irrationalen Zahlen beruht.

**) Damit das Integral $\int \omega(x)dx$ über die natürliche Begrenzung σ von l erstreckt seinem absoluten Betrage nach jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen kann, (während gleichzeitig für die Begrenzung σ noch die Differentialgleichung $i\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial z}$ besteht, was zur Anwendbarkeit des Cauchy'schen Satzes nöthig ist,) ist nothwendig, dass eine Strecke δ, wie klein sie auch sein mag, angegeben werden kann, unter

$\omega(x)$ in gegenüberliegenden Puncten nur wenig verschieden, die Elemente dx aber von entgegengesetztem Zeichen sind. Also ist das Integral über die Begrenzung von S kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse, mithin Null, w. z. b. w.

Wenn ein Theil einer Linie l oder ein Punct u auf die Begrenzung s von S selbst fällt, so sind nur geringe Modificationen des Beweises nöthig, es muss aber dann die Beschränkung gemacht werden, die im Charakter $f(x)$ an sich nicht liegt, dass das Integral über diese Begrenzung ausführbar ist, was z. B. nicht der Fall ist, wenn die Function für $x = u$ wie $\frac{1}{(x-u)\lg(x-u)}$ unendlich wird.

Es ist nicht wesentlich, dass, wie dies in der Zeichnung geschehen, S einfach zusammenhängend sei, und mithin s aus einem Stücke bestehe. Wesentlich ist, dass das Integral über die ganze Begrenzung zu nehmen ist, und dass das begrenzte Stück S bei der Integration über die etwaigen einzelnen Stücke von s immer zu derselben Seite der Integrationsrichtung liege.

Unendlich ist eigentlich keine Zahl, sondern es bedeutet das Wachsen einer Zahl über alle Grenzen. Dies kann in jeder beliebigen Richtung geschehen. Ebenso kann man sich jeder Zahl in unendlich vielen Richtungen nähern. Wächst die complexe Variabele x, welche mit ξ durch die Gleichung $x = \frac{1}{\xi - a}$ verbunden ist, in irgend einer Weise über alle Grenzen, so nähert

---

welche die Entfernung der Contour von der Linie l nicht herabzusinken braucht (einzelne Puncte etwa ausgenommen), damit die Differenzen der Werthe der Function ω für die Puncte auf σ und der Werthe für die nächstliegenden Puncte auf l ihrem absoluten Betrage nach überall kleiner als eine bestimmte beliebig kleine vorgegebene Zahl ε werden. Dies ist aber bei dem von uns gegebenen Begriffe der Stetigkeit von selbst erfüllt.

Die Annahme, dass $\frac{\partial\omega}{\partial y}$, $\frac{\partial\omega}{\partial z}$ in dem Stücke S' stetig sein sollen, kann durch die weniger beschränkende ersetzt werden, dass diese Functionen die doppelte Integration $\int\int\frac{\partial\omega}{\partial y}.\,dy\,dz$, $\int\int\frac{\partial\omega}{\partial z}.\,dy\,dz$ in eindeutigem Sinne zulassen. Dies würde in der That eine weit geringere Beschränkung sein, weil es Functionen giebt, die in jedem noch so kleinen Flächengebiete unendlich oft unstetig sind, und doch die Integration zulassen.

sich x immer mehr der Zahl a. Diese Eigenschaft macht es möglich in vielen Sätzen über complexe Zahlen ∞ wie eine Zahl anzusehen, oder das unendlich ferne Gebiet einer Ebene wie einen Punct zu betrachten. Wenn dies geschieht, so muss man zwar festhalten, dass ∞ nur uneigentlich eine Zahl zu nennen ist, aber es geschieht der Bequemlichkeit halber oft, und muss eben dadurch gerechtfertigt werden, dass man das Verhalten einer Function für über alle Grenzen wachsende Werthe sofort an dem Verhalten einer Function in einem bestimmten Puncte a studiren kann, indem man die Substitution $x = \frac{1}{\xi - a}$ macht, oder indem man die x-Ebene durch reciproke radii vectores abbildet. Um auch geometrisch hierzu eine adäquate Vorstellung zu gewinnen, sagt man, die Ebene sei in unendlicher Entfernung durch einen Punct geschlossen, den unendlich fernen Punct, indem man sich die Ebene etwa als Kugel mit unendlich grossem Radius vorstellt.

Die Oberfläche einer (endlichen oder unendlich grossen) Kugel ist ebenso einfach zusammenhängend als die Oberfläche einer Ebene. Denn was für eine geschlossene Linie man auch auf der Kugel ziehen mag, die Oberfläche wird dadurch in zwei getrennte Stücke zerlegt. Die Oberfläche der Kugel bleibt noch einfach zusammenhängend, wenn man einen Punct derselben, oder die beiden Ufer einer nicht geschlossenen, sich nicht schneidenden Linie als Begrenzung ansieht. Denn verbindet man irgend zwei Puncte dieser Begrenzung durch einen beliebigen Weg, so zerlegt derselbe die Kugeloberfläche stets in getrennte Stücke.

Der Cauchy'sche Satz behält auch für solche Ebenenstücke S seine Gültigkeit, welche den unendlich fernen Punct enthalten, wenn man eine Zahl M angeben kann, über welche der absolute Betrag von x nicht hinauszugehen braucht, damit $\text{abs}[\omega(x).x]$ kleiner als eine noch so kleine vorgegebene Zahl σ werde, was auch der Winkel der Zahl x sei. Die Zahl M wird natürlich zunehmen, wenn σ abnimmt, aber es ist nöthig, dass zu jedem bestimmten σ ein bestimmtes M existirt.

In der That, die Begrenzung des Stückes S, welches den unendlich fernen Punct im Innern enthält, sei s, so kann man einen Kreis k um den Anfangspunct der Coordinaten mit einem so grossen Radius R ziehen, dass er die Begrenzung s ganz umschliesst, dass er also ganz im Innern von S liegt. Dann ist



nach dem bewiesenen Cauchy'schen Satze das über die Begrenzung s erstreckte Integral $\int\limits_s \omega(x)\,dx$ gleich dem in derselben Richtung über k erstreckten Integrale $\int\limits_k \omega(x)\,dx$, also gleich

$$i\int_0^{2\pi} \omega(Re^{\vartheta i}).Re^{\vartheta i}\vartheta,$$

weil s und der Kreis k die ganze Begrenzung eines Ebenenstückes S ausmachen, in dessen Innerm $\omega(x)$ den Charakter „$f(x)$" hat. Da nun aber der absolute Betrag von $\omega(Re^{\vartheta i})R$, also auch von $\omega(Re^{\vartheta i}).R.e^{\vartheta i}$ kleiner als σ gemacht werden kann für ein hinlänglich grosses R (welches für alle ϑ dasselbe bleibt), so ist abs $\int\limits_k \omega(x).dx < \int_0^{2\pi} \sigma\,d\vartheta = 2\pi\sigma$. Da also $\int\limits_s \omega(x)\,dx < 2\pi\sigma$ d. h. kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse ist, so ist $\int\limits_s \omega(x)dx = 0$; w. z. b. w.

Liegt der unendlich ferne Punct auf der Begrenzung selbst, so muss die Integrabilität der Function $\omega(x)$ bis an diese Stelle vorausgesetzt werden (siehe I[b.]).

Man folgert nun unmittelbar den Satz:

IV. *Das Integral einer complexen Function $\omega(x)$ über die ganze Begrenzung s eines Ebenenstückes S erstreckt, ist gleich der Summe der Integrale der in derselben Richtung über die natürliche Begrenzung der Unstetigkeitsstellen von $\omega(x)$ erstreckten Integrale.*

V. *Das Integral $\int \omega(x)\,dx$ über jede von zwei zwischen x_0 und x' verlaufenden Linien l', l'', welche ein einfach zusammenhängendes Stück S einschliessen, in dessen Innerm $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat, liefert einen und denselben Werth.*

Denn nach dem Cauchy'schen Satze ist das Integral von x_0 bis x' über l' vermehrt um das Integral von x' bis x_0 über l'' Null, weil l' und l'' zusammen die ganze Begrenzung von S ausmachen, da S als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde. Dieses letztere Integral ist aber negativ gleich dem Integral von x_0 bis x' über l'', woraus der zu beweisende Satz folgt.

Hingegen kann das Integral $\int \omega(x)dx$ zwischen zwei Puncten x_0 und x', in einem nicht einfach zusammenhängenden Flächenstück, wie z. B. in einem von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Stücke auf verschiedenen Wegen sehr wohl verschiedene

Werthe erhalten. Wenn nämlich die beiden Wege zusammen den innern Kreis völlig einschliessen, so ist die Differenz der Integrale über die beiden Wege keineswegs Null, sondern gleich dem Integrale über den innern oder auch den äussern Kreis, und wenn diese Integrale nicht Null sind, so sind die beiden Integrale zwischen x_0 und x' verschieden.

Dieser Satz (V.) bewirkt die Anwendbarkeit der Schreibweise $\int_{x_0}^{x'} \omega(x)\,dx$, in welcher von dem Integrationswege nicht die Rede ist. In der That hängt der Werth des Integrals von einem Wege l, der die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Stückes S nicht überschreitet, nicht ab, wenn $\omega(x)$ darin den Charakter einer Function $f(x)$ besitzt, weil dann alle Wege zwischen x_0 und x' nach dem eben ausgesprochenen Satze auf einen unter ihnen reducirt werden können, wenn man solche Wege aufeinander reducirbar nennt, die zusammen ein einfach zusammenhängendes Stück einschliessen. Die Angabe des Weges darf aber nicht unterlassen werden, wenn $\omega(x)$ irgendwo im Innern von S, anders als eine Function vom Charakter $f(x)$, unendlich wird (während dies am Rande wohl geschehen kann), oder wenn es innerhalb eines Stückes betrachtet wird, das nicht einfach zusammenhängend ist, in welchem daher nicht alle Wege zwischen zwei Puncten auf einen reducirbar sind. Dabei muss freilich vorläufig noch bemerkt werden, dass der Weg nicht über Puncte hinwegführen darf, in welchen $\omega(x)$ so unendlich wird, dass die Integration keinen Sinn hat. Später zeigt sich, dass solche Puncte wenigstens im Innern eines einfach zusammenhängenden Stückes S überhaupt nicht vorkommen.

VI. *Das Integral $\int_{x_0}^{x} \omega(\xi)\,d\xi$, dessen obere und untere Grenze in einem einfach zusammenhängenden Stück S liegen, in dem $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat, ist in S eine Function der complexen Variabeln x von dem Charakter $f(x)$.*

Bezeichnen wir das Integral mit $W(x)$, so ist $W(x)$ in S offenbar endlich und stetig, es genügt aber auch der Differentialgleichung $\frac{\partial W}{\partial y} = -i\frac{\partial W}{\partial z}$. Es ist nämlich

$$W(x+dy) - W(x) = \int_{x_0}^{x+dy} \omega(\xi)\,d\xi - \int_{x_0}^{x} \omega(\xi)\,d\xi = \int_{x}^{x+dy} \omega(\xi)\,d\xi,$$

weil man für die Wegstrecke von x_0 bis x in den beiden Integralen, deren Differenz zu bilden ist, beide mal dieselbe wählen kann. Also ist nach der Definition des Integrals $W(x+dy)-W(x) = dy\,\omega(x)$ und ebenso $W(x+idz)-W(x) = idz\,\omega(x)$, folglich, ausgenommen vorläufig in einzelnen Puncten, in welchen $\omega(x)$ unendlich oder unstetig ist, $\frac{\partial W(x)}{\partial y} = -i\frac{\partial W(x)}{\partial z}$, w. z. b. w.

Man nimmt sehr häufig für die obere Grenze und die Integrationsvariabele einen und denselben Buchstaben.

VII. *Das Integral* $\int \frac{dx}{x-\xi}$ *über die natürliche Begrenzung von* ξ *in positiver Richtung erstreckt, hat den Werth* $2\pi i$.

Nehmen wir als natürliche Begrenzung einen um den Punct ξ mit dem Radius 1 geschlagenen Kreis, so ist $\text{abs}\left(\frac{dx}{x-\xi}\right) = ds$, wenn ds ein Linienelement der Kreisperipherie bedeutet, und da die Strecke von ξ nach x senkrecht steht auf der Strecke ds, so ist $\angle\left(\frac{dx}{x-\xi}\right)$, die Differenz der Winkel der Zahlen dx und $x-\xi$, gleich $\frac{1}{2}\pi$ und daher $\frac{dx}{x-\xi} = ids$ und $\int\frac{dx}{x-\xi} = i\int ds = i\,2\pi$. Die Gestalt der natürlichen Begrenzung ist aber nach dem Cauchy'shen Satze völlig willkürlich, und somit ist VII. bewiesen.

Damit wir das Integral $\int_1^x \frac{dx}{x}$ als Function der oberen Grenze x ansehen können, ziehen wir vom 0-Puncte der x-Ebene eine Gerade q ins Unendliche, deren beide Ufer wir als Begrenzung der Ebene ansehen — wir nehmen hierzu die positive y-Achse —, dann bildet diese ein einfach zusammenhängendes Stück S, in dessen I n n e r m die Function $\frac{1}{x}$ den Charakter $f(x)$ hat. In diesem Stück ist daher das Integral (nach den unter V. und VI. gemachten Bemerkungen) eine eindeutig bestimmte Function von x, wenn wir noch feststellen, dass $\int_1^x \frac{dx}{x}$ für $x = 1$ auf dem positiven Ufer von q verschwinde. Bezeichnen wir nun diese Function mit $\lg x$, so ist

$$\lg(\alpha.\beta) = \int_1^{\alpha.\beta} \frac{dx}{x} = \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} + \int_{\alpha}^{\alpha.\beta} \frac{d(\alpha x)}{\alpha x}$$

und wenn wir im letzten Integrale für αx die Variable ξ einführen,

$$\lg(\alpha.\beta) = \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} + \int_1^{\beta} \frac{d\xi}{\xi} = \lg\alpha + \lg\beta.$$

Aus der Gleichung $\lg(\alpha\beta) = \lg\alpha + \lg\beta$ folgt die Uebereinstimmung unseres Integrals mit den Logarithmen irgend einer constanten Basis. Da aber $\lg x$ auf dem negativen Ufer von q um $2\pi i$ grösser ist, als auf dem positiven, so stellt das Integral die natürlichen Logarithmen dar.*) Der Satz VII. kann nun auch so ausgesprochen werden:

---

*) $-\lg(1-x) = -\int_1^{1-x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^x \frac{dx}{1-x}$ lässt sich leicht in eine Reihe entwickeln. Es ist nämlich

$$\int_1^x \frac{dx}{1-x} = \sum_{1}^{m}{}_{(n)} \frac{x^n}{n+1} + \int_0^x \frac{x^m}{1-x}\,dx,$$

um nun das Integral $\int_0^x \frac{x^m\,dx}{1-x} = R_m$ zu untersuchen, integriren wir auf einer geraden Linie von 0 bis $x = R.e^{\varphi i}$, worin dann φ constant, dx demnach $= e^{i\varphi}.dr$ ist. Dann ist

$$R_m = e^{(m+1)\varphi i} \int_0^r \frac{r^m\,dr}{1-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$= e^{(m+1)\varphi i} \int_0^r \frac{r^m(1-r\cos\varphi)\,dr}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi} +$$

$$ie^{(m+1)\varphi i} \sin\varphi \int_0^r \frac{r^{m+1}\,dr}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi};$$

nun ist r^m eine Function, die zwischen 0 und r ihre Zeichen nicht wechselt, folglich, wenn $\lambda, \mu \leqq 1$ sind,

$$R_m = \frac{e^{(m+1)\varphi i}(1-\lambda r\cos\varphi)}{1-2\lambda r\cos\varphi + \lambda^2 r^2} \cdot \int_0^r r^m dr + \frac{ie^{(m+1)\varphi i}\mu r\sin\varphi}{1-2\mu r\cos\varphi + \mu^2 r^2} \int_0^r r^m dr$$

$$= \frac{e^{(m+1)\varphi i}.r^{m+1}}{m+1}\left(\frac{1-\lambda r\cos\varphi}{1-2\lambda r\cos\varphi + \lambda^2 r^2} + \frac{i\mu r\sin\varphi}{1-2\mu r\cos\varphi + \mu^2 r^2}\right).$$

So lange nun $r < 1$ ist, nähert sich dieser Ausdruck stets, wenn aber $r = 1$ für alle φ, ausser $\varphi = 0$ oder 2π, der Null, wenn man m gross genug nimmt, bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit. Demnach stellt die Reihe $\lim\limits_{m=\infty} \sum_{1}^{m}{}_{(n)} \frac{x^n}{n+1}$ die Function $-\lg 1-x$ so

VII[a]. *Der natürliche Logarithmus von* $x-\xi$, *also* $\lg(x-\xi)$ *wächst um* $2\pi i$, *wenn die Variable* x *um die ganze Begrenzung eines den Punct* ξ *enthaltenden Stückes* S *positiv herum geführt wird.*

Wenn das Stück S nicht einfach zusammenhängend ist, also die Begrenzung aus mehreren Stücken besteht, so muss die Variabele x natürlich über alle einzelnen Begrenzungsstücke geführt werden, und zwar so, dass für jedes einzelne Begrenzungsstück die begrenzte Fläche zu derselben Seite, nämlich für alle Stücke zur linken Seite liegt.

VIII. *Das Integral* $\int \frac{\omega(x)\,dx}{(x-\xi)\,2\pi i}$ *in positiver Richtung über die ganze Begrenzung s eines den Punct* ξ *im Innern enthaltenden Stückes* S, *in welchem* $\omega(x)$ *den Charakter* $f(x)$ *besitzt, erstreckt, hat den Werth* $\omega(\xi)$.

Schreibt man nämlich

$$\int \frac{\omega(x)}{x-\xi}\,\frac{dx}{2\pi i} = \int \frac{\omega(\xi)}{x-\xi}\,\frac{dx}{2\pi i} + \int \frac{\omega(x)-\omega(\xi)}{x-\xi}\,\frac{dx}{2\pi i},$$

so besitzt $\frac{\omega(x)-\omega(\xi)}{x-\xi}$ in S überall, auch für $x=\xi$ den Charakter $f(x)$ und das zweite Integral ist deshalb Null. $\int \frac{\omega(\xi)}{x-\xi}\,dx$ ist aber gleich $\omega(\xi)\int \frac{dx}{x-\xi} = 2\pi i\,\omega(\xi)$ nach Satz VII, woraus der zu beweisende Satz folgt.

---

lange $\operatorname{abs} x < 1$ ist und für $x = e^{\varphi i}$, so lange $\varphi \gtreqless 0,\ 2\pi$ ist, genau dar. Es ist indessen nicht unwichtig zu beachten, dass m grösser und grösser genommen werden muss, damit R_m kleiner als eine vorgegebene Grösse σ werde, wenn sich φ dem Werthe 0 unaufhörlich nähert, während $\operatorname{abs}(x) = 1$ ist. Dasselbe gilt auch für den imaginären Theil der Reihe, für $\Sigma \frac{\sin n\varphi}{n+1}$. Obgleich diese letztere Reihe für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ convergirt, so kann doch keine Zahl m angegeben werden, über welche man durchgehend für alle φ nicht hinaus zu gehen brauchte, damit $\sum_0^\infty \frac{\sin n\varphi}{n+1} - \sum_0^m \frac{\sin n\varphi}{n+1} < \sigma$ sei. Solche Reihen können der Infinitesimalrechnung nicht ohne Weiteres unterworfen werden und heissen ungleichmässig convergente Reihen. Dies ist zuerst von Herrn Seidel bemerkt.

Da nun $\frac{1}{x-\xi}$ einen einzigen bestimmten ersten, zweiten, dritten etc. Differentialquotienten besitzt, (wenn man unter $d\xi$ eine beliebige complexe, zuletzt unendlich klein werdende Zahl versteht,) also sammt seinen sämmtlichen Differentialquotienten eine Function der complexen Veränderlichen ξ ist, so erhält man, so lange ξ im Innern, und nicht am Rande von S liegt, durch Differentiation nach der complexen Variabeln ξ die Gleichung

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\frac{\omega(x)\,dx}{(x-\xi)^{n+1}} = \frac{d^n\omega(\xi)}{d\xi^n}$$

und den Satz:

IX. *Eine Function $\omega(x)$, die im Innern eines Stückes S den Charakter $f(x)$ hat, ist sammt ihren sämmtlichen Differentialquotienten im Innern, aber nicht nothwendig am Rande, eine endliche und stetige Function der complexen Variabeln x mit dem Charakter $f(x)$.*

Denn in der That hat das bestimmte über die ganze Begrenzung s von S ertreckte Integral $\int\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{n+1}}$ stets einen endlichen Werth, wenn $\omega(\xi)$, was vorausgesetzt wurde, am Rande von S integrabel ist, und der Punct x im Innern von S liegt, welches seine Lage auch sein möge.

Die Stetigkeit aber folgt aus der Endlichkeit und dem Vorhandensein der Differentialquotienten in jedem Puncte und nach allen Richtungen. *Demnach giebt es im Innern eines Stückes S, in welchem eine Function der complexen Variabeln x den Charakter $f(x)$ hat, weder eine Linie noch einen Punct, in welchem die Differentialgleichung $\frac{i\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial z}$ keine Anwendbarkeit besässe,* was z. B. stattfinden würde, wenn $\omega(x)$ bei Annäherung des Punctes x an einen bestimmten Punct in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe erhielte. *Ebensowenig kann es im Innern einen Punct u geben, in welchem eine solche Function $\omega(x)$ unendlich wird.* Im letzteren Falle kann man zwar den Punct x nicht auf den Punct u fallen lassen, weil dann der Satz $\int\frac{\omega(\xi)}{\xi-u}\frac{d\xi}{2\pi i} = \omega(u)$ nicht anwendbar ist, da ja $\frac{\omega(\xi)}{\xi-u}$ für $\xi = u$ in einer höhern als der ersten Ordnung unendlich wird,

d. h. mit $\xi - u$ multiplicirt, für $\xi = u$ nicht endlich bleibt. Allein es ist $\int \frac{\omega(\xi)}{\xi - u} \frac{d\xi}{2\pi i}$ immer endlich, und der absolute Betrag des Ausdruckes kann eine angebbare Zahl M, wie gross diese auch sein mag, und die offenbar nur von den Werthen der Function $\omega(x)$ am Rande von S abhängt, nicht übersteigen, wie nahe auch x an u herangebracht wird, während $\omega(x)$, welches diesem Ausdrucke, so lange x nicht genau auf u fällt, gleich ist einen absoluten Betrag besitzen muss, der grösser als jede Zahl M gemacht werden kann, wenn man x nur nahe genug an u rückt, vorausgesetzt, dass $\omega(x)$ für $x = u$ unendlich wird, wobei zu beachten ist, dass eine durch Abänderung eines Werthes in einem einzelnen Puncte hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Daraus folgt, dass ein solcher Punct u überhaupt nicht vorhanden sein kann. Hiernach sind die auf Seite 34 u. 35 vorläufig noch als möglich hingestellten Ausnahmen als unmöglich anzusehen. Nämlich, es giebt (Satz II.) keinen Weg durch das Innere eines einfach zusammenhängenden Stückes S, auf welchem die Integration keinen Sinn hätte, und es giebt (Satz VI.) keinen Punct x, in welchem $\int_{x_0}^{x} \omega(x)\,dx$ nicht differenzirbar wäre.

Die Function $e^{\frac{1}{x}}$ nimmt zwar bei Annäherung von x an Null in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe an, aber unter diesen sind Richtungen, in denen sie über alle Grenzen wächst, und zwar wächst für positive abnehmende x das Produkt $x^n e^{\frac{1}{x}}$ über alle Grenzen, wie gross n auch sein mag. Sie hat im Puncte $x = 0$ nicht den Charakter $f(x)$ und bildet daher keine Ausnahme zu dem bewiesenen Satze. Ebenso die Function $e^{e^{\frac{1}{x}}}$, die Function $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ hat für $x = 0$ keinen bestimmten Werth, es giebt aber kein noch so kleines Gebiet um den Punct $x = 0$ herum, in welchem $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ nicht ∞ würde, und also den Charakter $f(x)$ hätte, und demnach ist auch diese Function keine Ausnahme der Regel.

X. *Wird eine Function $\omega(x)$ im* I n n e r n *eines Stückes S im Puncte u so unendlich, und im Puncte v so Null, dass*

$\frac{\omega(x).(x-u)^n}{(x-v)^m}$ *für x gleich u und v sowohl von Null als von Unendlich verschiedene Werthe erhält, so sind m und n ganze Zahlen, wenn* $\omega(x)$, *abgesehen vom Puncte u, in S den Charakter* $f(x)$ *hat.*

Die Zahlen n und m heissen die Ordnungen des Unendlichwerdens oder Verschwindens.

Läge nämlich der reelle Theil von n zwischen p und $p+1$, und der von m zwischen q und $q-1$, so hätte $\frac{\omega(x)\,(x-u)^p}{(x-v)^q}$ in S den Charakter $f(x)$, und würde in den Puncten u und v unendlich, was nach IX. nicht möglich ist. Hingegen können am Rande von S gebrochene und complexe Ordnungen des Verschwindens und Unendlichwerdens wohl vorkommen. Ebensowenig kann $\omega(x)$ in verschiedenen Richtungen bei u in verschiedenen Ordnungen unendlich werden, wenn es nicht wie $e^{\frac{1}{x-u}}$ in über alle Grenzen hoher Ordnnng unendlich wird.

XI. *Der Logarithmus einer Function* $\omega(x)$, *welche im Innern eines Stückes S in einzelnen Puncten unendlich wird, sonst aber stetig und endlich ist und am Rande von S weder unendlich wird noch verschwindet, also* $\lg\omega(x)$ *wächst um so viele ganze Multipla von* $2\pi i$, *wenn x um die ganze Begrenzung von S in positiver Richtung herumgeführt wird, als der Ueberschuss der Puncte beträgt, für welche* $\omega(x)=0$ *ist, über die, für welche* $\omega(x)=\infty$ *ist, jeden Punct so oft gerechnet, als die Ordnungszahl des Unendlichwerdens oder Verschwindens beträgt.*

Sind die Puncte, für welche sie unendlich wird, $u, u', u'', \ldots$, die zugehörigen (nach X. immer ganzen) Ordnungen $n, n', n'', \ldots$, die Puncte, für welche sie verschwindet, $v, v', v'', \ldots$, die zugehörigen Ordnungen $m, m', m'', \ldots$, so ist der Zuwachs, den $\lg\omega(x)$ erfährt, wenn x um das nnendlich kleine Stück dx fortgeführt wird,

$$d\lg\omega(x) = d\lg\left(\frac{\omega(x)\,(x-u)^n(x-u')^{n'}(x-u'')^{n''}\ldots}{(x-v)^m.(x-v')^{m'}.(x-v'')^{m''}\ldots}\right)$$
$$+m\,d\lg(x-v)+m'\,d\lg(x-v')+m''\,d\lg(x-v'')+\ldots$$
$$-n\,d\lg(x-u)-n'\,d\lg(x-u')-n''\,d\lg(x-u'')-\ldots$$

und daher der Zuwachs, den der Logarithmus erfährt, wenn x um die ganze Begrenzung von S geführt wird,

$$\int d \lg \omega(x) =$$

$$\int \frac{d}{dx} \lg \left(\frac{\omega(x)(x-u)^n (x-u')^{n'} \ldots}{(x-v)^m (x-v')^{m'} \ldots} \right) dx + \sum m \int \frac{dx}{x-v} - \sum n \int \frac{dx}{x-v},$$

wenn die Integration über die ganze Begrenzung von S erstreckt wird. Nun hat das erste Integral der rechten Seite den Werth 0, weil $\lg \left(\frac{\omega(x)(x-u)^n \ldots}{(x-v)^m \ldots} \right)$, also auch der Differentialquotient in S den Charakter $f(x)$ hat. So hat man nach Satz IV. u. VII.:

$$\int d \lg \omega(x) = 2\pi i (\Sigma m - \Sigma n),$$

was zu beweisen war.

XII. *Eine Function $\omega(x)$, die in der ganzen Ebene und auch für unendlich grosse x den Charakter $f(x)$ hat, ist constant.*

Wir sagen aber von einer Function $\omega(x)$, dass sie auch für $x = \infty$ (im unendlich fernen Puncte der x-Ebene) den Charakter $f(x)$ besitzt, wenn $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$ für $\xi = 0$ den Charakter $f(\xi)$ hat. Nehmen wir nun das Integral $\int d \lg [\omega(x) - A]$ über die Peripherie eines sehr grossen Kreises mit dem Radius R, so kann diese Integration durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ durch die über einen sehr kleinen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{R}$ ersetzt werden*), nämlich durch das Integral $\int d \lg \left[\omega\left(\frac{1}{\xi}\right) - A\right]$. Nimmt man nun R so gross, also $\frac{1}{R}$, so klein, dass im Innern desselben $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$ den Werth A nicht annimmt, — was immer möglich ist, weil $\omega(x)$ sich mit wachsendem x, oder $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$ mit abnehmendem ξ nach dem, was pag. 38 bemerkt wurde, nur einem einzigen Werthe nähern kann, so ist, wenn der Werth $\omega(\infty)$ nicht gerade A ist, $\int d \lg \left[\omega\left(\frac{1}{\xi}\right) - A\right]$ über den [illegible] $\frac{1}{R}$, also auch $\int d \lg [\omega(x) - A]$ über den Kreis R Null, weil $\omega\left(\frac{1}{\xi}\right) - A$ im Innern des Kreises $\frac{1}{R}$ weder verschwindet noch unendlich wird.

---

*) Die Richtung der Integration ist hierbei die entgegengesetzte, weil $\xi \left(= \frac{1}{x}\right)$ rechts herumläuft, während x links herumläuft.

Es kann also $\omega(x) - A$ im Innern des Kreises R nicht Null werden, weil das Integral $\int d \lg [\omega(x) - A]$ ein so vielfaches Multiplum von $2\pi i$ ist, als Puncte vorhanden sind, für welche $\omega(x) - A$ verschwindet, dies Integral aber Null ist. Daraus folgt, dass die Function $\omega(x)$ im Innern des beliebig grossen Kreises R einen andern Werth als den $\omega(\infty)$ nicht annehmen kann, w. z. b. w.

Mit Hilfe der eben angewandten Methode sieht man übrigens leicht ein, dass der Satz XI. seine Giltigkeit für Ebenenstücke behält, welche den unendlich fernen Punct mit enthalten, wenn nur dort $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat. Man kann deshalb statt des Punctes ∞ zum Beweise des Satzes XII. einen beliebigen andern Punct der Ebene wählen und ihn in derselben Weise durchführen.

Aus den Identitäten:

$$\frac{1}{\xi - x} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-a}{\xi - a}}$$

$$= \frac{1}{\xi - a} + \frac{x-a}{(\xi - a)^2} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(\xi - a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{\xi - x},$$

$$\frac{1}{x - \xi} = \frac{1}{x - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{x - a}}$$

$$= \frac{1}{x - a} + \frac{\xi - a}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{(\xi - a)^n}{(x - a)^{n+1}} + \frac{(\xi - a)^{n+1}}{(x - a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{x - \xi}$$

folgen die wichtigen Sätze:

XIII. *Ist x ein Punct im Innern eines Stückes S, in welchem eine Function $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat, und welches den Punct a im Innern enthält, so ist*

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\xi)\, d\xi}{\xi - x}$$

$$= \int \frac{\omega(\xi)}{\xi - a} \cdot \frac{d\xi}{2\pi i} + (x-a) \int \frac{\omega(\xi)}{(\xi - a)^2} \frac{d\xi}{2\pi i} + \cdots$$

$$\cdots + (x-a)^n \int \frac{\omega(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \cdot \frac{d\xi}{2\pi i} + \frac{(x-a)^{n+1}}{2\pi i} \int \frac{\omega(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \cdot \frac{d\xi}{\xi - x},$$

worin sämmtliche Integrale in positiver Richtung über die Begrenzung von S zu nehmen sind, und

$$\omega(x) = \int \frac{\omega(\xi)}{x-\xi} \frac{d\xi}{2\pi i}$$

$$= \frac{1}{x-a} \int \frac{\omega(\xi) . d\xi}{2\pi i} + \frac{1}{(x-a)^2} \int \frac{\omega(\xi)(\xi-a) d\xi}{2\pi i} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int \frac{\omega(\xi)(\xi-a)^n d\xi}{2\pi i} + \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int \frac{\omega(\xi)(\xi-a)^{n+1} d\xi}{(x-\xi) 2\pi i},$$

worin die Integrationen sämmtlich in negativer Richtung über die ganze Begrenzung von S zu nehmen sind.

Ist nun abs$(x-a) <$ abs$(\xi-a)$ für alle bei der Integration in Betracht kommenden ξ, also ist x ein Punct im Innern eines um den Punct a gezogenen Kreises C, der die Begrenzung von S wohl berührt, aber nirgend heraustritt, so kann man n immer so gross nehmen, dass das Integral $\frac{(x-a)^{n+1}}{2\pi i} \int \frac{\omega(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \frac{d\xi}{\xi-x}$, genommen über die Begrenzung von S, oder, was in diesem Falle dasselbe ist, über die Peripherie C, jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreicht. In der That, setzen wir $\xi - a = Re^{\vartheta i}$, $x-a = re^{\vartheta_1 i}$, so ist R der Radius von C, r aber $< R$ und unser Integral erhält die Form

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{e^{\vartheta_1(n+1)i} . R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\omega(a + Re^{\vartheta i}) e^{-n\vartheta i} d\vartheta}{Re^{\vartheta i} - re^{\vartheta_1 i}}.$$

Das Integral ist aber, was auch n sei, weil die zu integrirende Function endlich und stetig ist, endlich und der Factor $\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$ kann jeden beliebigen Grad von Kleinheit erreichen, wenn n gross genug gemacht wird. Wendet man diese Betrachtung auf das letzte Glied der ersten der unter XIII. aufgestellten Reihen an, so erhält man den Taylor'schen Satz:

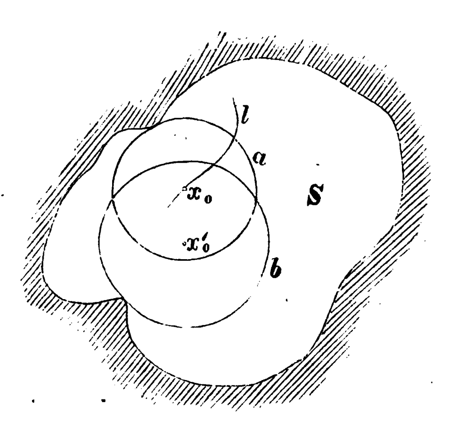
XIV. *Ist $\omega(x)$ im Innern eines Kreises um den Punct a eine Function mit dem Charakter $f(x)$, so lässt sie sich auf eine, und (nach der Methode der unbestimmten Coefficienten) nur auf eine Weise in eine unendliche Reihe nach ganzen aufsteigenden Potenzen von $x-a$ entwickeln, welche immer convergirt, so lange x ein Punct im Innern dieses Kreises ist. Dieser Kreis heisst der Convergenzkreis.*

Obgleich die hier gemachte Betrachtung des Restgliedes eigentlich nur zeigt, dass die Summe der ersten n Glieder der

Reihe gegen den Werth der entwickelten Function convergire, so sieht man doch leicht ein, dass, so lange $r = \text{abs}(x - a)$ um ein Angebbares kleiner ist als R, der Radius des Convergenzkreises, die Reihe absolut und unbedingt convergent ist, d. h. eine beliebige Anordnung der Glieder zulässt, weil dies bei der geometrischen Reihe $\Sigma a_n x^n$ so lange $\text{abs}(x) < 1$ ist und die Coefficienten a_n endlich sind, der Fall ist. Dies findet im Allgemeinen nicht statt für die Puncte des Convergenzkreises.

XV. *Hat eine Function $\omega(x)$, innerhalb eines Stückes S den Charakter $f(x)$, und ist $\omega(x)$ längs eines noch so kleinen Stückes einer Linie l in S Null, so ist $\omega(x)$ überall in S Null.*

Die sämmtlichen Differentialquotienten der Function $\omega(x)$ sind für einen Punct x_0 jener Linie (l) Null, wenn man für das Differential dx eine solche Differenz $x - x_0$ wählt, deren Minuendus x auf der Linie (l) liegt, und da die Differentialquotienten einer complexen Function von der Wahl (d. h. von dem Winkel) des Differentials unabhängig sind, und die Differentialquotienten einer Function einer complexen Variabeln mit dem Charakter $f(x)$ immer eben solche Functionen sind, so sind für $x = x_0$ sämmtliche Differentialquotienten Null. Nun kann man aber $\omega(x)$ auf eine und nur eine Weise (nach XIV.) nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickeln innerhalb eines Kreises a, der die Be-



grenzung von S berührt und zum Mittelpunct x_0 hat. Da nun sämmtliche Coefficienten dieser Entwicklung Null sind, so ist $\omega(x)$ im Innern dieses ganzen Kreises Null. Entwickelt man ferner $\omega(x)$

nach XIV. in eine Reihe nach Potenzen von $x - x'_0$, so sind auch deren Coefficienten sämmtlich Null, wenn x'_0 ein beliebiger Punct im ersten Kreise ist. Dieser lässt sich so wählen, dass der Convergenzkreis (b) der Entwicklung zum Theil aus dem Kreise (a) heraustritt. In diesem ganzen Kreise ist $\omega(x)$ Null. So zeigt man successive, dass $\omega(x)$ in S nirgend von Null verschieden sein kann. Daraus folgt

XVI. *Ist eine Function $\omega(x)$ längs eines noch so kleinen Stückes einer Linie l in einem einfach zusammenhängenden Stücke S, wo sie den Charakter $f(x)$ hat, gegeben, so ist sie dadurch für alle Puncte in S eindeutig bestimmt.*

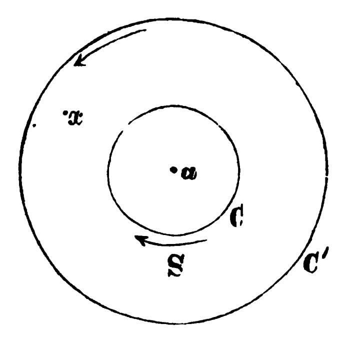
Denn eine andere Function $\omega_1(x)$ der complexen Variabeln x, welche mit ihr längs l in S übereinstimmt, stimmt überhaupt in S mit ihr überein, weil $\omega(x) - \omega_1(x)$ längs l, folglich überall Null ist. Die Beschränkung, dass S einfach zusammenhängend sein soll, ist wegen des Wortes eindeutig gemacht. Denn es kann, wie sich später zeigen wird, leicht geschehen, dass eine Function, die als Function der complexen Variabeln x durch ein zweifach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet fortgesetzt wird, für dieselben Puncte mehrere oder unendlich viele verschiedene Werthe erhält. Auch in solchen Fällen ist die Function durch ihre Werthe längs einer Linie, so weit sie fortsetzbar ist, vollständig, aber doch nicht als eindeutige Function bestimmt.

Ein Beispiel dafür, dass eine Function über den Rand eines Gebietes hinaus überhaupt nicht stetig fortsetzbar ist, wird später in den Thetafunctionen gegeben.

Der eben ausgesprochene Satz XVI. ist in der Analysis oft von grossem Nutzen. Es gelingt nämlich häufig die Identität zweier Functionen $\omega(x)$ und $\chi(x)$ nur in einem beschränkten Gebiete nachzuweisen, in dem man sich beim Beweise z. B. unendlicher Reihen oder bestimmter Integrale bedient, die nur in einem bestimmten Gebiete von zwei Ausdehnungen, oder einer Ausdehnung, wie z. B. nur für reelle x zwischen $x = a$ und $x = b$, einen Sinn haben. Aus der nur für ein beschränktes Gebiet bewiesenen Gleichheit von $\omega(x)$ und $\chi(x)$ folgt dieselbe dann aus XVI. überall, so weit $\omega(x)$ und $\chi(x)$ als Functionen der complexen Veränderlichen x fortsetzbar sind. Wir werden später hiervon ein Beispiel geben.

XVII. **Laurent'scher Satz.** *Hat eine Function $\omega(x)$ im Innern und am Rande eines* (beiläufig zweifach zusammenhängenden)

Ebenenstückes S zwischeu zwei im Puncte a concentrischen Kreisen den Charakter $f(x)$, so lässt sie sich auf eine, und nur auf eine Weise nach ganzen auf- und absteigenden Potenzen von $x-a$ in eine unendliche Reihe entwickeln, die so lange convergirt, als x ein Punct im Innern von S ist.



Seien die Peripherien des äusseren und inneren Kreises C' und C, so bilden C, C' zusammen die Begrenzung des Stückes S, in dessen Innerm sowohl als am Rande $\omega(x)$ den Charakter $f(x)$ hat. Deshalb ist die Summe der Integrale über C' in positiver und über C in negativer Richtung*), oder der Integrale über C' und C

$$\int_{C'} \frac{\omega(\xi)}{\xi-x}\frac{d\xi}{2\pi i} + \int_{C} \frac{\omega(\xi)}{x-\xi}\frac{d\xi}{2\pi i},$$

beidemale in positiver Richtung integrirt, gleich $\omega(x)$, weil in der That diese beiden Integrationen zusammen der über die ganze Begrenzung von S gleich kommen. Da aber, so lange abs$(x-a)$ $<$ abs$(\xi-a)$ ist, $\frac{1}{\xi-a}$ in die absolut convergente Reihe entwickelbar ist,

$$\frac{1}{\xi-x} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(x-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}},$$

und so lange abs$(x-a) >$ abs$(\xi-a)$ ist, $\frac{1}{x-\xi}$ in die absolut und folglich unbedingt convergente Reihe

$$\frac{1}{x-\xi} = \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(\xi-a)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

entwickelbar ist, und da bei der Integration über C' wirklich abs$(x-a) <$ abs$(\xi-a)$ und bei der über C abs$(x-a) >$ abs$(\xi-a)$ ist, wenn x im Innern von S liegt, so folgt

*) Ich nenne hier positive Richtung die, bei welcher die begrenzte Kreisfläche, nicht das Stück S zur Linken bleibt.

$$\omega(x) =$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}(x-a)^n \int\limits_{C'} \frac{\omega(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \frac{d\xi}{2\pi i} + \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}(x-a)^{-n} \int\limits_{C} \frac{\omega(\xi)(\xi-a)^{n-1}d\xi}{2\pi i},$$

worin nun nach dem Cauchy'schen Satze statt der Integration über C' und C eine über eine beliebige in a centrische Kreislinie zwischen C' und C gewählt werden kann.

Damit ist die Entwickelbarkeit dargethan, es muss noch nachgewiesen werden, dass sie nur auf eine Weise möglich ist, wozu die Methode der unbestimmten Coefficienten nicht ausreicht.

Sind zwei nach auf- und absteigenden Potenzen von $x-a$ geordnete, absolut oder wenigstens gleichmässig*) convergente Reihen wenigstens für Puncte der Peripherie p eines in a centrischen Kreises einander gleich, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich sein. Multiplicirt man nämlich die Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)} A_n(x-a)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)} B_n(x-a)^n$$

mit $(x-a)^{\mu}$ und integrirt über die Peripherie p, wobei μ als ganze positive oder negative Zahl oder 0 vorausgesetzt ist, so hat man

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} A_n \int\limits_{p} (x-a)^{n+\mu} dx = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_n \int\limits_{p} (x-a)^{n+\mu} dx,$$

und es fallen auf beiden Seiten sämmtliche Terme bis auf den mit $A_{-\mu-1}$ und auf der andern bis auf den mit $B_{-\mu-1}$ multiplicirten fort. Denn es ist $\int\limits_{p}(x-a)^{n+\mu}dx = 0$, wenn $n+\mu$

---

*) Diese Beschränkung muss gemacht werden, weil nur in solchen Reihen ohne Weiteres die Summation und Integration vertauscht werden kann. Man versteht aber unter einer absolut convergenten Reihe eine solche, welche noch convergirt, wenn man jedes Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Eine gleichmässig convergente Reihe (welche Bezeichnung seit einiger Zeit im Gebrauch ist) heisst eine Reihe, bei der für alle Werthe der Veränderlichen eine **einzige** bestimmte Zahl M angegeben werden kann, so gross, dass die Summe der ersten M Glieder sich von dem Grenzwerthe der Reihe um weniger als eine vorgegebene Grösse σ unterscheidet.

eine von -1 verschiedene ganze Zahl ist, und $\int_p (x-a)^{-1}dx = 2\pi i$ nach VII. Somit haben wir für alle μ

$$2\pi i\, A_{-\mu-1} = B_{-\mu-1}\, 2\pi i, \quad \text{oder} \quad A_n = B_n, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Setzt man in der Taylor'schen Reihe (XIV.) oder der Laurent'schen Reihe (XVII.) $(x-a) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ und für r eine Constante, so gehen diese Reihen in eine Fourier'sche oder trigonometrische Reihe über, d. h. in eine Reihe, welche nach Sinus und Cosinus ganzer Multipla des Winkels ϑ fortschreitet, wenn man diesen Namen (Fourier'sche Reihen) auf Reihen mit complexen Coefficienten ausdehnt. Der genaueren Untersuchung dieser Reihe, welche von Fourier, Dirichlet und Riemann, und den Herren Lipschitz, Heine und Cantor bis in die feinsten Details geführt worden ist, verdankt man die meisten Aufschlüsse über die verborgenen Schwierigkeiten der Analysis.*) Es sollen hier nur einige Resultate aus diesen Untersuchungen ohne Beweis aufgeführt werden.

XVIII. *Eine Function $h(\vartheta)$, welche durch eine trigonometrische Reihe*

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\, a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$$

*gegeben ist, lässt sich, wenn die Reihe für jeden Werth von ϑ convergirt, und nur für eine endliche**) Anzahl einzelner Werthe von ϑ nicht convergirt, nicht noch auf eine andere Art durch eine eben solche trigonometrische Reihe darstellen.*

Zusatz. *Ist die Function $h(\vartheta)$ in einem Intervalle stetig und hat sie darin nicht unendlich viele Maxima und Minima, so ist in diesem Intervalle die sie darstellende Reihe gleichmässig convergent.* (Heine.)

Wir bezeichnen mit Dirichlet für abnehmende S den Grenz-

---

*) Dirichlet: Crelle'sches Journal B. IV. pag. 157. — Riemann: Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Gött. 1867. — Lipschitz: De explicatione per series trigonometricas instituenda Crelle's Journal 63 pag. 296. — Heine: Crelle's Journal B. 71 pag. 353. — Cantor: Crelle's Journal B. 72 pag. 130 u. 139.

**) Die Endlichkeit kann unter gewissen Umständen fallen gelassen werden, wie Herr G. Cantor in den Leipziger Math. Annalen V. pag. 122 zeigt.

werth $\lim h(\vartheta+\delta)$ mit $h(\vartheta+0)$ und $\lim h(\vartheta-\delta)$ mit $h(\vartheta-0)$, dann besteht der Satz:

XIX. *Ist $h(\vartheta)$ eine Function der reellen Veränderlichen ϑ, welche in dem Intervall von 0 bis 2π gegeben ist, und nur für einzelne Werthe von ϑ unstetig, oder in einer um ein Angebbares niederen als der ersten Ordnung unendlich wird, so lässt sich in diesem Intervall*

$$\tfrac{1}{2}h(\vartheta+0)+\tfrac{1}{2}h(\vartheta-0), \qquad [\tfrac{1}{2}h(+0)+\tfrac{1}{2}h(2\pi-0)]$$

in eine unendliche nach Sinus und Cosinus ganzer Multipla der Veränderlichen ϑ fortschreitende Reihe entwickeln, welche überall da, wo dieser Ausdruck eine bestimmte endliche Zahl ist, convergirt, und auch überall da convergirt, wo $h(\vartheta+\psi)-h(\vartheta+0)$ oder

$$h(\vartheta-\psi)-h(\vartheta-0) \quad \textit{mit} \quad \lg\psi.\lg\lg\psi\ldots\lg^{m-1}\psi.(\lg^m\psi)^{1+\sigma}$$

multiplicirt für ein beliebiges ganzes positives m und ein beliebig kleines aber positives σ mit abnehmendem ψ in dem Falle gegen Null strebt, wenn einer dieser beiden Ausdrücke für abnehmende ψ unendlich viele Maxima und Minima besitzen sollte. Und zwar ist dann

$$\tfrac{1}{2}h(\vartheta+0)+\tfrac{1}{2}h(\vartheta-0)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_{(\mu)}\cos\mu\vartheta\int_0^{2\pi}h(\varphi)\cos\mu\varphi\,d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_{(\mu)}\sin\mu\vartheta\int_0^{2\pi}h(\varphi)\sin\mu\varphi\,d\varphi.$$

Eine Ordnung, die um ein Angebbares kleiner ist, als eine andere, ist hier immer eine solche, welche durch eine Potenz gemessen wird, so dass die Ordnung des Unendlichwerdens von $\frac{1}{x\lg x}$ für $x=0$ nicht um ein Angebbares kleiner ist als die erste.

Hieraus zieht man den nützlichen Satz:

XX. *Hat eine Function $\omega(x)$ im Innern eines Kreises um den Punct a den Charakter $f(x)$ und wird am Rande nur in einzelnen Puncten unendlich gross in einer um ein Angebbares niederen als der ersten Ordnung, ist aber sonst am Rande stetig, so convergirt die Summe der ersten n Glieder der Taylor'schen Reihe, welche $\omega(x)$ im Innern darstellt, für alle Puncte des Randes (Convergenzkreises), für welche $\omega(x)$ nicht unendlich wird, mit wachsendem n gegen den Werth $\omega(x)$.*

Wir kehren nun zu den Functionen einer complexen Veränderlichen zurück.

XXI. *Eine Function $\omega(x)$, welche in der ganzen x-Ebene den Charakter $f(x)$ hat, ausser für $x = \infty$, wo $\omega(x).x^{-n}$ den Charakter $f(x)$ hat, ist eine ganze Function von x vom Grade n.*

Dass n nothwendig eine ganze Zahl ist, folgt aus dem Satz X. Entwickelt man nun $\omega(x)$ nach Mac Laurin (Satz XIV.) in die Reihe:

$$\omega(x) = \omega(0) + \frac{\omega'(0)}{1} x + \frac{\omega''(0)}{1.2} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{x^{n+1}}{2\pi i} \int \frac{\omega(\xi)\, d\xi}{\xi^{n+1}(\xi - x)},$$

wobei die Integration über einen beliebig grossen Kreis erstreckt werden kann, der x in seinem Innern enthält, so ist nach dem Cauchy'schen Satze (III.) pag. 32 das Integral

$$\int \frac{\omega(\xi)}{\xi^n} \cdot \frac{d\xi}{\xi.(\xi - x)} = 0,$$

weil $\frac{\omega(\xi)}{\xi^{n+1}(\xi - x)}$ für alle Puncte, den unendlich fernen Punct eingeschlossen, welche ausserhalb des Kreises R liegen, den Charakter $f(x)$ hat, und für $x = \infty$ in einer höheren als der ersten Ordnung verschwindet. Folglich ist $\omega(x)$ eine ganze Function vom $n$ten Grade, w. z. b. w.

XXII. *Ist $\omega(x)$ eine Function, welche in der ganzen Ebene den Charakter $f(x)$ hat, ausser in einzelnen Puncten $u, u', u'', \ldots$ (unter denen der unendlich ferne sein kann), wo sie in der n^{ten}, n'^{ten}, $n''^{ten}, \ldots$ Ordnung unendlich wird, so ist $\omega(x)$ eine rationale Function von x.*

Es ist nämlich $\omega(x).(x-u)^n.(x-u')^{n'}.(x-u'')^{n''}\ldots$ eine Function, die in der ganzen Ebene den Charakter $f(x)$ hat, ausser für $x = \infty$, wo sie in einer endlich hohen Ordnung unendlich wird, und demnach eine ganze Function von x, woraus der zu beweisende Satz folgt.

Zusatz. *Sind die Puncte, in denen diese Function verschwindet, $v, v', v'', \ldots$, und die Ordnungen $m, m', m'', \ldots$, so ist die Function*

$$\omega(x) = \text{Const.} \frac{(x-v)^m (x-v')^{m'}.(x-v'')^{m''}\ldots}{(x-u)^n.(x-u')^{n'}.(x-u'')^{n''}\ldots}$$

und sie ist also bis auf einen constanten Factor durch die Puncte in denen sie verschwindet und unendlich wird, bestimmt.

Denn zwei ganze Functionen, die in denselben Puncten gleich oft, d. h. in gleich hoher Ordnung, verschwinden, unterscheiden sich nur durch einen constanten Factor, weil ihr Quotient in der ganzen Ebene den Charakter $f(x)$ hat.

XXIII. **Partialbrüche.** *Eine Function $\omega(x)$, welche im Innern eines Stückes S den Charakter $f(x)$ hat, ausser in den Puncten $u, u', u'', \ldots$, wo sie so unendlich wird, dass bez. $\omega(x)(x-u) = U$, $\omega(x)(x-u') = U'$, $\omega(x)(x-u'') = U'', \ldots$ für $x = u, u', u'', \ldots$ wird, und $U, U', U'', \ldots$ endliche Grössen sind, kann in der Form dargestellt werden*

$$\omega(x) = \frac{U}{x-u} + \frac{U'}{x-u'} + \frac{U''}{x-u''} + \ldots,$$

wenn $\int \frac{\omega(\xi)\, d\xi}{\xi - x}$ über die ganze Begrenzung s von S erstreckt, den Werth 0 hat.

Es ist nämlich nach Satz IV.

$$\int \frac{\omega(\xi)}{\xi-x} \frac{d\xi}{2\pi i} = \omega(x) + \sum_{(u)} \int \frac{\omega(\xi)}{\xi-x} \frac{d\xi}{2\pi i},$$

wenn die Integrationen der über alle Puncte $u, u', u'' \ldots$ zu nehmenden Summe über die natürlichen Begrenzungen dieser Puncte erstreckt werden. Schreibt man nun

$$\int \frac{\omega(\xi)}{\xi-x} \frac{d\xi}{2\pi i} = \int \frac{\omega(\xi).(\xi-u)}{2\pi i(\xi-x)} \cdot \frac{d\xi}{\xi-u},$$

so hat $\frac{\omega(\xi)(\xi-u)}{\xi-x}$ im Innern der natürlichen Begrenzung von u, über welche die Integration zu erstrecken ist, den Charakter $f(\xi)$ und das Integral den Werth $\frac{U}{u-x}$ in Gemässheit des Satzes VIII. Wenn nun das über s erstreckte Integral verschwindet, so hat man demnach

$$\omega(x) + \sum \frac{U}{u-x} = 0 \quad \text{oder} \quad \omega(x) = \sum \frac{U}{x-u},$$

w. z. b. w.

Die Grössen $U, U', \ldots$ wollen wir mit Cauchy die Residuen der Function $\omega(x)$ in den Puncten $u, u', \ldots$ nennen. Wird $\omega(x)$ in einem Puncte in höherer Ordnung unendlich gross, so kann das so aufgefasst werden, als ob mehrere Puncte u auf ihn gefallen wären.

XXIV. **Produktentwicklung.** *Wird eine Function $\omega(x)$ im Innern eines Stückes S in den Puncten $u, u', u'', \ldots$ unendlich gross bez. in der $n^{ten}, n'^{ten}, n''^{ten}, \ldots$ Ordnung, und in den Puncten $v, v', v'', \ldots$ unendlich klein bez. in der $m^{ten}, m'^{ten}, m''^{ten}, \ldots$ Ordnung, und hat sonst in S den Charakter $f(x)$, und hat das Integral*

$$\int \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - x}$$

über die ganze Begrenzung s von S erstreckt, den Werth 0, so findet für alle im Innern von S liegende Puncte x_0 und x die Gleichung statt:

$$\frac{\omega(x)}{\omega(x_0)} = \frac{\left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^m}{\left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^n} \cdot \frac{\left(\frac{x-v'}{x_0-v'}\right)^{m'}}{\left(\frac{x-u'}{x_0-u'}\right)^{n'}} \cdot \frac{\left(\frac{x-v''}{x_0-v''}\right)^{m''}}{\left(\frac{x-u''}{x_0-u''}\right)^{n''}} \cdots$$

Wendet man nämlich die Partialbruchentwicklung auf die Function $\frac{d \lg \omega(x)}{dx} = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = W(x)$ an, so haben wir unter der Voraussetzung, dass

$$\int_s \frac{W(\xi)}{\xi - u} d\xi = \int_s \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - u}$$

verschwindet, und dass die Grössen

$$U = \lim_{x=u} W(x)(x-u), \qquad U' = \lim_{x=u'} W(x)(x-u'), \ldots$$

$$V = \lim_{x=v} W(x)(x-v), \qquad V' = \lim_{x=v'} W(x)(x-v'), \ldots$$

endliche Grössen sind, nach XXIII.

$$W(x) = \sum \frac{U}{x-n} + \sum \frac{V}{x-v} = \frac{d \lg \omega(x)}{dx},$$

woraus durch Integration zwischen x_0 und x hervorgeht

$$\int_{x_0}^x W(x)\,dx = \int_{x_0}^x d \lg \omega(x) = \lg \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)}$$

$$= \sum_{(v)} \lg \left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^V + \sum_{(u)} \lg \left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^U + 2k\pi i,$$

worin k eine lineare Function von $U, U', \ldots, V, V', \ldots$ mit ganzzahligen Coefficienten ist, die daher rührt, dass über den Integrationsweg nichts festgesetzt ist, und $\int \frac{U}{x-u} dx$, $\int \frac{V}{x-v} dx$

um $2\mu U\pi i$ bez. $2\nu V\pi i$ wachsen, wenn die Wege μmal um u, νmal um v herumgeführt werden. Nun ist aber

$$\frac{d\lg\omega(x)}{dx} = \frac{d\lg[\omega(x)(x-u)^n]}{dx} - \frac{d\lg(x-u)^n}{dx} = \chi(x) - \frac{n}{x-u},$$

und $\chi(x)$ eine Function von x, welche in der Umgebung von u den Charakter $f(x)$ hat, also

$$\lim_{x=u} W(x)(x-u) = \lim_{x=u} [\chi(x)(x-u)-n] = -n = U.$$

Ferner

$$\frac{d\lg\omega(x)}{dx} = \frac{d\lg[\omega(x)(x-v)^{-m}]}{dx} + \frac{d\lg(x-v)^m}{dx} = \psi(x) + \frac{m}{x-v},$$

worin $\psi(x)$ in der Umgebung von v den Charakter $f(x)$ hat, mithin

$$\lim_{x=v} W(x)(x-v) = \lim_{x=v} [\psi(x)(x-v)+m] = m = V.$$

Mithin ist

$$\lg\frac{\omega(x)}{\omega(x_0)} = \sum_{(v)} \lg\left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^m - \sum_{(u)} \lg\left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^n + 2k\pi i,$$

worin nun k eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Geht man nun vom Logarithmus zum Numerus über, so folgt

$$\frac{\omega(x)}{\omega(x_0)} = \frac{\prod_{(v,m)}\left(\frac{x-v}{x_0-v}\right)^m}{\prod_{(u,n)}\left(\frac{x-u}{x_0-u}\right)^n},$$

w. z. b. w.

Um ein Beispiel einer Entwickelung einer Function in ein unendliches Produkt zu haben, wählen wir die Function $\cos\frac{\pi(x-h)}{2K}$, welche die Periode $4K$ hat und in den Puncten $x = h+(2m+1)K$ für alle ganzzahligen positiven oder negativen m verschwindet, für andere endliche Werthe von x aber weder verschwindet, noch unendlich wird. Denn da $\cos u = \frac{1}{2}(e^{ui}+e^{-ui})$ ist, so wird $\cos u$ nur da Null, wo $e^{2ui} = -1$ wird, was nur für $u = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$ geschieht, und e^{ui} wird für keinen endlichen reellen oder complexen Werth von u unendlich, weil es durch eine überall convergente nach Potenzen von u fortschreitende Reihe dargestellt wird.

Nach Satz XXIV. ist demnach (A)

$$\frac{\cos\frac{\pi(x-h)}{2K}}{\cos\frac{\pi h}{2K}} = \Pi\frac{h+(2m+1)K-x}{h+(2m+1)K} = \Pi 1-\frac{x}{h+(2m+1)K},$$

wenn man diese Produkte aus allen möglichen Factoren bildet, die in Puncten $x = h+(2m+1)K$ verschwinden, welche in das Innere eines Stückes S von der Eigenschaft fallen, dass das über die ganze Begrenzung s von S genommene Integral

$$\int_s \operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-h)}{2K}\cdot\frac{d\xi}{\xi-x} =$$

$$\int_s \operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-h)}{2K}\cdot\frac{d\xi}{\xi-h} + \int_s \operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-h)}{2K}\,\frac{(x-h)\,d\xi}{(\xi-h)(\xi-x)}$$

verschwindet. Ziehen wir um Punct $\xi = h$ einen sehr grossen Kreis, dessen Peripherie s keinen der Puncte $\xi = h+(2m+1)k$ trifft, so bleibt auf der ganzen Peripherie s des Kreises die Function $\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-h)}{2K}$ endlich und nimmt für die Endpuncte eines Durchmessers nur durch das Vorzeichen verschiedene Werthe an, weil dort $\xi-h$ entgegengesetzte Werthe besitzt, und die Tangente eine ungerade (mit dem Argument das Zeichen wechselnde) Function ist. Da nun auf der ganzen Peripherie das Element $\frac{d\xi}{\xi-h}$ einen und denselben Werth, nämlich $i d\varphi$ hat (wenn $\xi-h = Re^{\varphi i}$ gesetzt wird), so heben sich die Elemente des Integrals

$$\int_s \operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-h)}{2K}\,\frac{d\xi}{\xi-h},$$

welche zu Endpuncten eines Durchmessers gehören, Glied für Glied auf, und das Integral ist genau Null. In dem Integral

$$\int_s \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-h)}{2K}}{\xi-x}\cdot\frac{d\xi}{\xi-h} = i\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{tg}\frac{R\pi e^{\varphi i}}{2K}}{Re^{\varphi i}+h-x}\,d\varphi$$

sinkt der absolute Betrag der zu integrirenden Function mit wachsendem R unter jeden beliebigen Grad von Kleinheit herab, weil der Kreis s (mit dem Radius R) so gezogen ist, dass $\operatorname{tg}\frac{R\pi e^{\varphi i}}{2K}$ immer endlich bleibt, und es convergirt daher das

Integral gegen Null, wenn R grösser und grösser genommen wird. Dasselbe gilt daher auch von dem kritischen Integrale

$$\int_s \operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-h)}{2K}\cdot\frac{d\xi}{\xi-h}.$$

Es muss demnach das Produkt (A) über alle ganzen Zahlen erstreckt werden, für welche die Werthe $x = h + (2m+1)K$ im Innern eines sehr grossen um den Punct h geschlagenen Kreises liegen. Dies sind nicht schlechthin unendlich viele negative Zahlen m und unendlich viele positive, sondern die Anzahl der negativen und positiven (da natürlich h eine endliche Zahl ist) werden sich nur um ein Endliches unterscheiden, und zwar werden die Zahlen m, welche nicht sowohl als positive als auch als negative im Produkte zu nehmen sind, sehr gross (unendlich gross) sein. Da es nun auf eine endliche Anzahl unendlich ferner Factoren offenbar nicht ankommt, weil diese gegen 1 convergiren, so kann man

$$\text{(A)} \qquad \frac{\cos\frac{\pi(x-h)}{2K}}{\cos\frac{\pi h}{2K}} = \lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \left(1-\frac{x}{h+(2m+1)K}\right)$$

$$\cos\frac{\pi x}{2K} = \prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{[(2m+1)K]^2}\right)$$

setzen, während z. B.

$$\text{(B)} \qquad \lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{p.n}{}_{(m)} \left(1-\frac{x}{h+(2m+1)K}\right) \text{ gegen } e^{-\frac{x\lg p}{2K}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi(x-h)}{2K}}{\cos\frac{\pi h}{2K}}$$

convergirt. Denn wir können diesen Grenzwerth in die Form

$$\lim_{n=\infty} \prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \left(1-\frac{x}{h+(2m+1)K}\right).\lim_{n=\infty} \prod_{n+1}^{pn}{}_{(m)} \left(1-\frac{x}{h+(2m+1)K}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi(x-h)}{2K}}{\cos\frac{\pi h}{2K}}.\lim_{n=\infty} \prod_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)} \left(1-\frac{x}{2nK+2mK+K+h}\right)$$

bringen. Nun ist aber, wenn man mit n zur Grenze unendlich übergeht, und der Kürze halber das Zeichen lim fortlässt,

$$\prod_{1}^{(p-1)n}\left(1-\frac{x}{2nK+2mK+K+h}\right)$$

$$= e^{\sum_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)} \lg\left(1-\frac{x}{2nK+2mK+K+h}\right)} = e^{-\sum_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)}\frac{x}{2nK+2mK+K+h}}$$

$$= e^{-\frac{x}{2K}\sum_{1}^{(p-1)n}{}_{(m)}\frac{1}{1+\frac{m}{n}+2\frac{K+h}{n}}\cdot\frac{1}{n}} = e^{-\frac{x}{2K}\int_{1}^{p}\frac{dx}{x}} = e^{-\frac{x\lg p}{2K}},$$

womit (B) bewiesen ist.

Ein Beispiel für Partialbruchentwicklung erhält man am einfachsten dadurch, dass man (A) logarithmisch differenzirt. Dann ist

$$\frac{d\lg\dfrac{\cos\frac{\pi(x-h)}{2K}}{\cos\frac{\pi h}{2K}}}{dx} =$$

$$-\frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi(x-h)}{2K} = \lim_{n=\infty}\sum_{-n-1}^{n}\frac{-1}{h+(2m+1)K-x},$$

und wenn man $h=0$ setzt und zusammenzieht

$$\text{(C)*)}\qquad \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2K} = \frac{4xK}{\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{1}{(2m+1)^2K^2-x^2}.$$

Die unendlichen Produkte und Partialbruchreihen eignen sich ganz vorzüglich zur Darstellung periodischer und doppelt periodischer Functionen. Die Gleichungen (A) und (C) liefern Beispiele einfach periodischer Functionen. Ehe wir dazu schreiten, doppelt periodische Functionen durch sie darzustellen, müssen wir einige Eigenschaften solcher Functionen voraufschicken.

XXV. *Eine in der ganzen x-Ebene ausser für $x=\infty$ eindeutige Function der complexen Veränderlichen x, welche die beiden Perioden $2K$ und $2iK'$ besitzt, kann nicht existiren, wenn nicht $iK' : K$ eine complexe jedenfalls nicht rein reelle Zahl ist.*

Angenommen $F(x)$ sei eine Function der complexen Veränderlichen x mit den Perioden $2K$ und $2iK'$, und es sei $iK' : K$ eine reelle Zahl ϱ, so ist

$$F(x+2mK+2niK') = F(x)$$

für beliebige ganze positive oder negative m und n, gemäss der Bedeutung der Periodicität. Setzt man $L=2pK+2iqK'$, unter

*) Für $x=0$ fliesst hieraus: $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{1}{(2m+1)^2}$.

p und q ganze positive oder negative Zahlen verstanden, so ist $F(x+mL) = F(x)$, und es kann mithin L als eine Periode von $F(x)$ angesehen werden.

Sind nun erstens $2K$ und $2iK'$ commensurabel, also $\varrho = p' : q'$, $2K = p'\tau$, $2iK' = q'\tau$, wenn p', q' ganze relative Primzahlen sind, τ aber eine beliebige complexe Zahl ist, so kann man bekanntlich immer zwei solche ganze positive oder negative Zahlen p und q finden, dass $pp' + qq' = 1$ ist, und es ist dann $L = 2pK + 2qiK' = (pp' + qq')\tau = \tau$ eine Periode der Function $F(x)$, von der $2K$ und $2iK'$ ganze Multipla sind. Mithin kann zwar eine Function $F(x)$ mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ existiren, aber sie ist keine doppelt periodische, sondern eine einfach periodische Function mit der Periode τ.

Sind aber zweitens K und iK' incommensurabel, also ϱ eine irrationale Zahl, so kann man zeigen, dass $F(x)$ eine Periode L haben müsste, deren absoluter Betrag kleiner wäre als jede noch so kleine vorgegebene Zahl, die also Null wäre. In der That, jede Zahl L von der Form $2mK + 2niK' = (m + \varrho n).2K$ ist eine Periode von $F(x)$, und $m + \varrho n$ und folglich L kann kleiner als jede noch so kleine Zahl σ gemacht werden. Wir können nämlich eine ganze Zahl N so gross annehmen, dass $1 : N < \sigma$ ist. Theilt man dann die Strecke zwischen 0 und 1, ebenso die Strecke zwischen 1 und 2, ferner zwischen 2 und 3 u. s. w. zwischen p und $p+1$ in N Theile, und nennt ein erstes Intervall die Zahlenstrecke zwischen 0 und $1 : N$, zwischen 1 und $1 + \frac{1}{N}$, zwischen p und $p + \frac{1}{N}$, ein μ^{tes} Intervall die Strecke zwischen $\frac{\mu-1}{N}$ und $\frac{\mu}{N}$, oder $1 + \frac{\mu-1}{N}$ und $1 + \frac{\mu}{N}, \ldots,$ zwischen $p + \frac{\mu-1}{N}$ und $p + \frac{\mu}{N}$ etc., und bildet die Zahlenreihe

$$\varrho,\ 2\varrho,\ 3\varrho,\ \ldots \qquad N\varrho,\ (N+1)\varrho,$$

so müssen von den Zahlen dieser Reihe wenigstens in ein Intervall, etwa in das μ^{te}, zwei hineinfallen. Denn auf einen Theilpunct (Anfangs- oder Endpunct) der Intervalle kann keine der Zahlen der Reihe fallen, weil ϱ irrational ist, diese Puncte aber Träger rationaler Zahlen sind, die Anzahl der Zahlen der Reihe ist aber um Eins grösser als die Zahl der Intervalle. Sind etwa

$p\varrho$ und $p'\varrho$ die beiden Zahlen der Reihe, welche in ein gleichgezähltes Intervall hineinfallen, so dass also

$$p\varrho = q + \frac{\mu}{N} - \varepsilon, \quad \varrho p' = q' + \frac{\mu}{N} - \varepsilon'$$

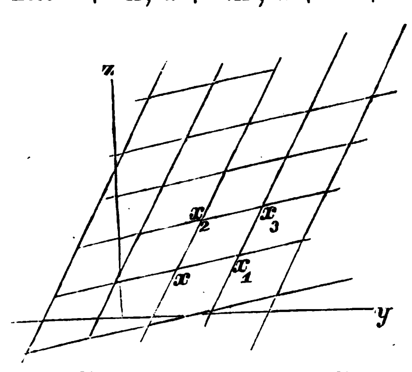
ist, und q, q' ganze Zahlen, ε und ε' aber kleiner als $1 : N$ sind, so ist

$$\varrho p - q - \varrho p' + q' = (q' - q) + (p - p')\varrho = \varepsilon' - \varepsilon < \frac{1}{N} < \sigma.$$

und es sind also $q' - q$ und $p - p'$ die Zahlen, welche für m und n gewählt werden können, damit $m + \varrho n < \sigma$ werde.

Da also die Function $F(x)$ eine Periode L von beliebig kleinem absoluten Betrage besitzt, die aber einen bestimmten Winkel, nämlich $\angle(L) = \angle(K) = \angle(iK')$ hat, so muss sie längs einer beliebigen Geraden g, die mit der y-Achse den Winkel $\angle(K)$ bildet, in beliebig kleinen Intervallen, nämlich für Puncte, die um die Strecke abs(L) von einander entfernt sind, dieselben Werthe annehmen. Eine solche Function würde, wenn sie nicht constant ist, also endliche Werthdifferenzen besitzt, in jedem noch so kleinen Stück jener Linie g um ein Endliches von einander verschiedene Werthe besitzen, und mithin überall unstetig sein, und demnach den Charakter einer Function der complexen Variabeln x nirgends haben. Also existirt eine solche Function $F(x)$ nicht, oder sie ist constant.

Um den Verlauf einer doppelt periodischen Function anschaulich zu machen, zerlegt man die x-Ebene in sogenannte Periodenparallelogramme. Man wählt einen beliebigen Punct x und die Puncte $x + 2K$, $x + 2iK'$, $x + 2K + 2iK'$ zu Ecken eines Parallelogramms, und nimmt zu Seiten desselben meist gerade Linien, was jedoch ganz unwesentlich ist, man kann dasselbe auch durch beliebige parallele Curven begrenzen, wenn nur die gegenüberliegenden Puncte der Begrenzung um $2K$ bez. um $2iK'$ von einander verschiedene Zahlen zu Trägern haben. Sodann



$x_1 = x + 2K$, $x_2 = x + 2iK'$, $x_3 = x + 2K + 2iK'$,

zerlegt man die ganze Ebene in unendlich viele Parallelogramme, die diesem ersten congruent sind, und deren Ecken Träger von Zahlen sind, welche in der Form $x+2mK+2niK'$, $x+2(m+1)K+2niK'$, $x+2mK+2(n+1)iK'$, $x+2(m+1)K+2(n+1)iK'$ enthalten sind.

Zu einem solchen Parallelogramme rechnen wir nun immer das Innere und zwei aneinander stossende Seiten derselben, wenn von einem Parallelogramm oder den Puncten eines Parallelogramms schlechthin gesprochen wird. Es genügt dann zur Kenntniss einer doppelt periodischen Function vollständig, sie in einem Parallelogramm zu kennen. Denn in den Puncten verschiedener Parallelogramme, die sich decken würden, wenn man die Parallelogramme durch Verschiebung (ohne Drehung) zur Deckung bringt, z. B. in den Mittelpuncten der verschiedenen Parallelogramme hat eine doppelt periodische Function dieselben Werthe. Solche Puncte sollen zugeordnete Puncte heissen.

Im unendlich fernen Puncte der x-Ebene ist eine doppelt periodische Function unbestimmt, weil derselbe jedem Puncte eines Parallelogramms als zugeordnet angesehen werden kann.

Bildet man ein Parallelogramm, welches mehrere der oben gezeichneten ganz in sich schliesst, z. B., wenn dort 0 für x gesetzt wird, das Parallelogramm mit den Ecken 0, $4K$, $6iK'$, $4K+6iK'$, so kann dies auch als ein Periodenparallelogramm angesehen, und die ganze Ebene in ihm congruente getheilt, und die Function in einem unter ihnen untersucht werden. Denn jede Function, welche die Perioden $2K$ und $2iK'$ hat, hat auch die Perioden $2mK$ und $2niK'$, aber nicht umgekehrt.

Ein Periodensystem*) $2K$ und $2iK'$, aus welchem jedes andere denkbare Periodensystem $2K_1$ und $2iK_1'$ einer doppelt periodischen Function durch Gleichungen von der Form

$$K_1 = mK + inK', \qquad K_1' = m'K + niK'$$

hervorgeht, wenn m, n, m', n' ganze positive oder negative Zah

*) Die Wahl der Bezeichnung $2K$ und $2iK'$ ist getroffen, um mit Jacobi in Uebereinstimmung zu bleiben. Bei ihm sind K und K' meist reelle Grössen, diese beschränkende Voraussetzung wird jedoch hier nur ausnahmsweise gemacht.

len sind, heisst ein **Elementarsystem** und ein aus ihnen gebildetes Parallelogramm ein **Elementar-Perioden-Parallelogramm** oder kürzer **Elementar-Parallelogramm**.

Man kann für eine doppelt periodische Function auf unzählige Arten verschiedene Elementarsysteme oder Elementar-Parallelogramme, die eine Ecke im Nullpuncte haben, bilden. **Diese Parallelogramme haben alle denselben Flächeninhalt.**

Sind nämlich $2K$, $2iK'$ zwei Perioden, die ein Elementarsystem bilden, so sind offenbar

$$2K_1 = 2mK + 2niK', \qquad 2iK_1' = 2m'K + 2n'iK'$$

ein eben solches System, wenn

$$2K = 2pK_1 + 2qiK_1', \qquad 2iK' = 2p'K_1 + 2q'iK_1'$$

ist, und p, q, p', q' wiederum ganze Zahlen sind. Hierzu ist ausreichend und nothwendig, dass

$$mn' - nm' = \pm 1$$

sei. Ist nun $2K = \alpha + \beta i$, $2K'i = \gamma + \delta i$, so ist der Flächeninhalt des aus $2K$ und $2iK'$ gebildeten Parallelogramms, abgesehen vom Vorzeichen, gleich $\alpha\delta - \beta\gamma$, und der Flächeninhalt des Parallelogramms aus den Perioden

$$2K_1 = (m\alpha + n\gamma) + i(m\beta + n\delta), \quad 2iK_1' = (m'\alpha + n'\gamma) + i(m'\beta + n'\delta)$$

ist abgesehen vom Vorzeichen gleich

$$(m\alpha + n\gamma)(m'\beta + n'\delta) - (m\beta + n\delta)(m'\alpha + n'\gamma) = (\alpha\delta - \beta\gamma)(mn' - m'n)$$

also abgesehen vom Vorzeichen gleich $\alpha\delta - \beta\gamma$, w. z. b. w.

XXVI. *Eine doppelt periodische Function $\omega(x)$ nimmt im Innern und auf zwei zusammenstossenden Seiten eines Perioden-Parallelogrammes jeden Werth und zwar jeden Werth gleich oft an.*

Das Integral $\int d\lg[\omega(x) - A] = \int \frac{\omega'(x)}{\omega(x) - A}\, dx$ über den ganzen Rand eines Parallelogramms erstreckt, ist Null. Denn da $\omega'(x)$ offenbar*) eine doppelt periodische Function mit denselben Perioden wie $\omega(x)$ ist, so nimmt $\frac{\omega'(x)}{\omega(x) - A}$ in gegenüberliegenden Begrenzungstheilen denselben Werth an, während die Integrationsrichtung in diesen Theilen die entgegengesetzte ist.

*) Sind $2K$ und $2iK'$ die Perioden, so ist $\omega(x + 2Km + 2iK'n) = \omega(x)$ und folglich $\omega'(x + 2Km + 2iK'n) = \omega'(x)$.

Mithin ist die Summe der Beiträge, welche zwei gegenüberliegende Begrenzungselemente zum Integral liefern, Null, mithin das ganze Integral Null. Also muss nach Satz VII[a.] $\omega(x) - A$ im Innern des Parallelogramms ebenso oft verschwinden, als unendlich werden, also $\omega(x)$ den Werth A annehmen, und zwar ebenso oft annehmen, als $\omega(x)$ unendlich wird. Diese Schlussweise ist nur dann nicht anwendbar, wenn $\omega(x)$ den Werth A oder ∞ am Rande des Parallelogramms annehmen sollte. Da man aber die Begrenzung keineswegs als geradlinig vorauszusetzen braucht, so kann man immer zwei anstossende Seiten, etwa durch kleine Ausbiegungen, so abändern, dass die Puncte, für welche $\omega(x)$ gleich A oder ∞ wird, aus dem Parallelogramm herausfallen. Da man sodann die gegenüberliegenden Begrenzungsstücke in congruenter Weise ebenfalls abändern muss, so werden dadurch ebenso viele Puncte in das Innere des Parallelogramms hineingezogen, als durch die erste Abänderung aus demselben entfernt wurden. Demnach müssen in unserm Satze, wie übrigens schon früher festgesetzt wurde, immer zwei zusammenstehende Seiten zum Parallelogramm hinzugerechnet, und die diesen gegenüberliegenden von dem Parallelogramm ausgeschlossen werden.

Nimmt eine doppelt periodische Function in einem Elementarparallelogramm jeden Werth n-mal an, so sagt man sie sei eine doppeltperiodische Function der nten Ordnung.

XXVII. *Eine doppelt periodische Function, wenn sie nicht constant ist, wird in einem Periodenparallelogramm mindestens zweimal unendlich gross erster Ordnung, oder einmal unendlich gross zweiter Ordnung.**)

Zunächst sieht man ein, dass sie mindestens einmal unendlich werden muss, denn da sie, wenn sie nicht constant ist, nach XXVI. jeden Werth (gleich oft) annimmt, so muss sie auch den Werth ∞ (oder ihre reciproke den Werth Null), einmal annehmen. Sodann aber kann sie auch nicht in nur einem Puncte unendlich gross nur erster Ordnung werden. Dies folgt aus dem

Hilfssatz: *Die Summe der Residuen einer doppelt periodischen Function in einem Periodenparallelogramm ist Null.*

*) Wird die Function $\omega(x)$ in den Puncten $u, u', u'', \ldots$ bez. in der $n^{\text{ten}}, n'^{\text{ten}}, n''^{\text{ten}}, \ldots$ Ordnung unendlich, und ist $n + n' + n'' + \ldots = N$, so sagt man die Function werde Nmal unendlich.

Unter dem Residuum einer Function $\omega(x)$ im Puncte $x = u$, in welchem sie unendlich gross erster Ordnung wird, verstanden wir (siehe pag. 51) den Grenzwerth

$$\lim_{x=u} \omega(x)(x-u) = \frac{1}{2\pi i}\int \omega(x)\,dx,$$

wenn das Integral über die natürliche Begrenzung (siehe pag. 24) des Punctes u erstreckt wird. Wird aber die Function $\omega(x)$ für $x = u$ in höherer Ordnung unendlich, so hat das Integral wohl noch einen Sinn, nicht aber der Grenzwerth. Wir nennen auch in diesem Falle den Werth des Integrals das Residuum der Function. Wird nämlich $\omega(x)$ im Puncte $x = u$ in der $n$ten Ordnung*) unendlich, so ist $\omega(x).(x-u)^n$ in der Umgebung des Punctes u eine Function vom Charakter $f(x)$ und lässt sich daher in eine convergente Reihe von der Form

$$A + A_1(x-u) + A_2(x-u)^2 + \dots + A_{n-1}(x-u)^{n-1} + A_n(x-u)^n + \dots$$

entwickeln, woraus sich ergiebt

$$\omega(x) = \frac{A}{(x-u)^n} + \frac{A_1}{(x-u)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-u} + A_n + A_{n+1}(x-u) + \dots,$$

oder

$$\omega(x) = \frac{A}{(x-u)^n} + \frac{A_1}{(x-u)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-2}}{(x-u)^2} + \frac{A_{n-1}}{x-u} + f(x),$$

worin $f(x)$ im Innern der natürlichen Begrenzung des Punctes u den Charakter „$f(x)$“ hat. Aus dieser Darstellung der Function $\omega(x)$ geht nun hervor, dass das Residuum im Puncte u

$$\frac{1}{2\pi i}\int \omega(x)\,dx = A_{n-1},$$

also eine endliche Zahl sei, weil das über die natürliche Begrenzung von u erstreckte Integral $\int (x-u)^\mu\,dx$ für alle positiven oder negativen, von -1 verschiedenen Werthe von μ verschwindet.

Nun seien $u, u', u'', \dots$ die Puncte eines Parallelogramms, in welchen die doppelt periodische Function $\omega(x)$ unendlich wird, welche dort die Residuen bez. $U, U', U'', \dots$ besitzt, so ist das

*) Doppelt periodische Functionen, die in einzelnen Puncten in über alle Grenzen hoher Ordnung unendlich werden (wie $e^{\frac{1}{x-u}}$ für $x = u$), sind hier von der Untersuchung ausgeschlossen.

über den Rand des Parallelogramms genommene Integral (nach Satz IV.)

$$\int \omega(x)\,dx = 2\pi i(U + U' + U'' + \ldots).$$

Andrerseits ist aber das Integral Null, weil der Beitrag, den zwei gegenüberliegende Elemente zum Integral liefern ($\omega(x)dx - \omega(x+2K)\,dx$ oder $\omega(x)\,dx - \omega(x+2iK')\,dx$) Null ist; $\omega(x)$ hat nämlich wegen der Periodicität in gegenüberliegenden Puncten der Begrenzung denselben Werth, dx den entgegengesetzten, weil die Integrationsrichtung die entgegengesetzte ist. Also ist $U + U' + U'' + \ldots = 0$, w. z. b. w.

Ist nun nur ein einziger Punct u vorhanden, und würde $\omega(x)$ dort nur in erster Ordnung unendlich gross, so flösse hieraus

$$U = \lim_{x=u} \omega(x)(x-u) = 0$$

d. h. $\omega(x)$ würde für $x = u$ in niederer als erster Ordnung unendlich, was nur möglich ist (nach Satz X.) wenn $\omega(x)$ für $x = u$ in nullter Ordnung unendlich wird, d. h. dort endlich bleibt. Also würde dann $\omega(x)$ überhaupt nicht unendlich, und müsste, wie bewiesen, constant sein.

Eine besondere Betrachtung wäre noch nöthig, wenn der Punct u am Rande des Parallelogramms liegen sollte, weil dann möglicher Weise auch gebrochene Ordnungen zulässig wären. Allein man kann dann das Parallelogramm parallel mit sich selbst so weit verschieben, dass der Punct u in das Innere fällt, oder auch den Punct u durch eine kleine Abänderung der gegenüberliegenden Begrenzungsstücke in der Nähe von u vom Rande ins Innere versetzen, woraus sich ergiebt, dass gebrochene oder logarithmische Ordnungen unmöglich sind. Somit ist nun XXVII. allgemein bewiesen, und es fliesst daraus beiläufig der Satz:

Wird eine doppelt periodische Function in einem Periodenparallelogramm nur zweimal unendlich gross erster Ordnung, so ist das Parallelogramm ein Elementar-Parallelogramm,

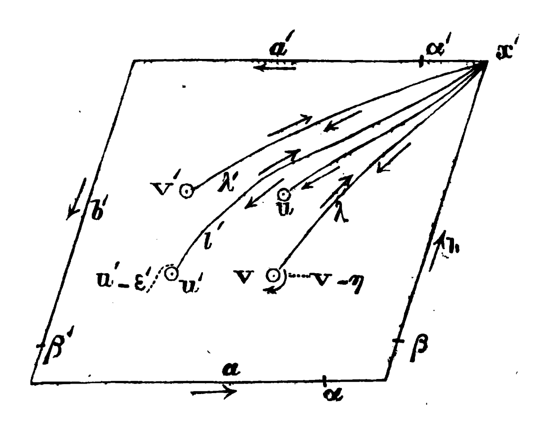
welcher kaum eines Beweises bedarf, weil andernfalls in einem der etwaigen Theilperioden-Parallelogramme die Function überall endlich wäre. Nimmt man im Falle, in welchem die Function in nur einem Puncte zweimal (d. h. zweiter Ordnung) unendlich gross wird, solche vier Puncte zu Ecken eines Parallelogramms, in welchem die Function unendlich wird, und enthält das Parallelogramm keine andern derartigen Puncte mehr, so hat man ein Elementar-

parallelogramm construirt. Die Construction ist in allen Fällen nicht schwer, in welchen die Puncte, für welche die Function unendlich wird, bekannt sind.

XXVIII. *Die Summe der n Werthe von x, für welche eine doppelt periodische Function n^{ter} Ordnung $\omega(x)$ in einem Periodenparallelogramm denselben Werth annimmt, ist jeder andern Summe solcher n Werthe nach den Perioden congruent.*

Werthe x_1, x_2 heissen einander nach den Perioden congruent ($x_1 \equiv x_2$), wenn sie sich nur um ganze Multipla der Perioden unterscheiden (also wenn $x_2 = x_1 + 2mK + 2niK'$ ist). Träger zugeordneter Puncte sind einander congruent.

Wir beweisen, dass die Summe der Werthe, für welche $\omega(x)$ den Werth A annimmt, congruent ist der Summe der Werthe, für welche $\omega(x)$ unendlich wird, womit der Satz bewiesen ist. Dabei können wir uns, um die Figur nicht zu compliciren, auf Functionen zweiter Ordnung beschränken, der allgemeine Beweis bietet sodann nicht die geringsten Schwierigkeiten. Die Begrenzung des Parallelogramms wählen wir dabei so, dass die Puncte u, u', für welche $\omega(x) = \infty$, oder v, v', für welche $\omega(x) = A$ wird, ins Innere fallen. Hierauf ziehen wir, wie dies in der Figur ge-



schehen ist, um u, u', v, v' kleine Kreise, und verbinden ihre Peripherien durch sich nicht schneidende Linien l, l', λ, λ' mit einem Puncte x' der Begrenzung. Diejenigen Ufer, welche für die Richtung von x' nach den Kreisen hin zur Linken liegen, sollen die positiven heissen und mit $l+$, $l'+$, $\lambda+$, $\lambda'+$, die andern

(negativen) mit l^-, l'^-, λ^-, λ'^- bezeichnet werden. Die äusseren Ufer der Kreise, welche die Puncte u, u', v, v' ausscheiden, die beiden Ufer der Linien l, l', λ, λ' und die Seiten des Parallelogramms bilden zusammen die ganze Begrenzung s eines einfach zusammenhängenden Ebenenstückes, in dessen Innerm und am Rande die doppelt periodische Function $\omega(x)-A$ den Charakter $f(x)$ hat und nicht verschwindet, so dass $\lg[\omega(x)-A]$ eine Function vom Charakter $f(x)$ *) ist. Demnach ist das über die ganze Begrenzung s in positiver Richtung erstreckte Integral

$$\int \lg[\omega(x)-A]\,dx = 0,$$

wie Satz III. lehrt.

Andrerseits können wir das über s erstreckte Integral in die Summe der in der Richtung des Pfeiles über a b a' b' l^+, l^-, l'^+, l'^-, λ^+, λ^-, λ'^+, λ'^- und über die Kreise um u, u', v, v' zerlegen; diese Summe muss ebenfalls Null sein. Die Function $\omega(x)-A$ hat nun in gegenüberliegenden Puncten der Linie a und a' oder b und b', wie in α und α' oder in β und β' wegen der Periodicität dieselben Werthe. Im Puncte β sei x um $2K$ grösser als in β', in α' um $2iK'$ grösser als in α. Dann ist offenbar, da dx in α und α', in β und β' entgegengesetzte Werthe hat,

$$\int_a \lg[\omega(x)-A]\,dx + \int_{a'} \lg[\omega(x)-A]\,dx$$
$$= \int_a \{\lg[\omega(x)-A] - \lg[\omega(x+2iK')-A]\}\,dx,$$
$$\int_b \lg[\omega(x)-A]\,dx + \int_{b'} \lg[\omega(x)-A]\,dx$$
$$= \int_b \{\lg[\omega(x)-A] - \lg[\omega(x-2K)-A]\}\,dx.$$

Aus der Gleichung $\omega(x\pm 2K)-A = \omega(x)-A$ können wir nur schliessen $\lg[\omega(x-2K)-A] = \lg[\omega(x)-A] \pm 2m\pi$ und ähnlich $\lg[\omega(x+2iK')-A] = \lg[\omega(x)-A] \pm 2n\pi i$, weil man aus der Gleichheit der unter deu Logarithmuszeichen stehenden Ausdrücke nicht die Gleichheit der Logarithmen folgern darf, da sich diese

*) Dass $\lg x = \int_1^x \frac{dx}{x}$ in einem einfach zusammenhängenden Stücke, welches die Puncte $x=0$ oder $x=\infty$ nicht enthält, einen von der Differentiationsrichtung unabhängigen Differentialquotienten besitzt, folgt aus Satz VI., und mithin kommen die pag. 19 rege gemachten Bedenken hier nicht in Betracht.

noch um ganze Multipla von $2\pi i$ unterscheiden können. Demnach sind die (über a und b genommenen) oben aufgestellten Integrale gleich

$$\pm\int_a 2n\pi i\,dx = \pm 4n\pi i K, \quad \mp\int_b 2m\pi i\,dx = \pm 4m\pi K',$$

worin m und n unbekannte ganze Zahlen sind, an deren näherer Feststellung uns hier nichts liegt.

Die Summe der Integrale über die beiden Ufer der Linie λ, in der Richtung des Pfeiles, also

$$\int_{\lambda+} \lg[\omega(x)-A]\,dx + \int_{\lambda-} \lg[\omega(x)-A]\,dx$$

ist gleich

$$\int_{\lambda+} \lg[\omega(x)-A]^+\,dx - \int_{\lambda+} \lg[\omega(x)-A]^-\,dx$$

$$= \int_{\lambda+} \{\lg[\omega(x)-A]^+ - \lg[\omega(x)-A]^-\}\,dx,$$

wenn wir mit $\lg[\omega(x)-A]^+$ den Werth dieser Function auf dem positiven Ufer, mit $\lg[\omega(x)-A]^-$ auf dem negativen Ufer von λ bezeichnen, denn die Werthe von dx auf entgegengesetztem Ufer unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Die Differenz der Werthe in denselben Puncten von λ auf verschiedenen Ufern ist aber $-2\pi i$ nach Satz VII^a^., weil der Kreis um v einen Punct einschliesst, in welchem $\omega(x)-A$ in erster Ordnung verschwindet. Ist nun der Endpunct von λ auf dem kleinen Kreise $v-\eta$, so ist das obige über λ erstreckte Integral

$$\int_{x'}^{v-\eta} 2\pi i\,dx = 2\pi i(v-x'-\eta).$$

Das Integral über den kleinen Kreis um v werde mit H bezeichnet, so ist H ein mit ε verschwindender Ausdruck, der seinem absoluten Betrage nach kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Grösse gemacht werden kann, wenn man den Radius des Kreises um v hinlänglich klein annimmt. Denn dies Integral ist, wenn r der Radius jenes Kreises ist,

$$H = i\int_0^{2\pi} r\lg[\omega(v+re^{\vartheta i})-A]\,e^{\vartheta i}\,dv$$

und da $r\lg[\omega(v+re^{\vartheta i})-A]$ mit abnehmendem r verschwindet, so verschwindet auch H mit abnehmendem r oder ε. Sind ferner die Endpuncte der Linien λ', l, l' auf den zu ihnen gehörenden Kreisen η', ε, ε', und die über die Kreise genommenen Integrale

H', E, E', so folgt nach der eben angewandten Methode, dass die Summe der über die Linien l^+, l^-, l'^+, l'^-, λ^+, λ^{-1}, λ'^+, λ'^- und der über die kleinen Kreise genommenen Integrale gleich

$$-2\pi i(u-x'-\varepsilon)+E-2\pi i(u'-x'-\varepsilon')+E'$$
$$+2\pi i(v-x'-\eta)+H+2\pi i(v'-x'-\eta')+H'$$
$$=2\pi i(v+v'-u-u')-2\pi i(\eta+\eta'-\varepsilon-\varepsilon')+E+E'+H+H'$$

sei, und dass E, E', H, H' mit ε, ε', η, η' zu Null convergiren. Somit ist die Summe der über die einzelnen Stücke der Begrenzung s genommenen Integrale, wenn m und n positive oder negative ganze Zahlen sind, einerseits gleich

$$4n\pi iK+4m\pi K'+2\pi i(v+v'-u-u')-2\pi i(\eta+\eta'-\varepsilon-\varepsilon')+$$
$$E+E'+H+H',$$

andrerseits aber gleich Null. Da aber durch Verkleinerung der Radien der um u u' v v' gezogenen Kreise $2\pi i(\varepsilon+\varepsilon'-\eta-\eta')+E+E'+H+H'$ jeden beliebigen Grad von Kleinheit erhalten kann, so muss schon für sich

$$2\pi i(2nK+2miK'+u+u'-v-v')=0$$

oder

$$u+u'\equiv v+v' \qquad (\text{mod. } 2K,\ 2iK')$$

sein, w. z. b. w.

XXIX. *Haben zwei doppelt periodische Functionen der complexen Variabeln x dieselben Perioden, und werden sie beide in nur zwei Puncten unendlich gross erster Ordnung, so kann die eine als lineare Function der andern mit Abänderung ihres Arguments um eine Constante ausgedrückt werden.*

Ist nämlich $\omega(x)$ eine doppelt periodische Function mit den Perioden $2K$ und $2iK'$, und wird sie für $x=a$ und $x=b$ unendlich gross in der ersten Ordnung, und verschwindet sie (ebenfalls in der ersten Ordnung) für $x=\alpha$, $x=\beta$, und hat die Function $\varphi(x)$ die nämlichen Perioden und wird für $x=a'$, $x=b'$ unendlich gross in der ersten Ordnung, und verschwindet für $x=\alpha'$, $x=\beta'$, so wird die Function

$$F(x)=\frac{\omega[x+\frac{1}{2}(a+b-a'-b')]-\omega[\alpha'+\frac{1}{2}(a+b-a'-b')]}{\omega[x+\frac{1}{2}(a+b-a'-b')]-\omega[a'+\frac{1}{2}(a+b-a'-b')]}$$

in denselben Puncten Null und unendlich als die Function $\varphi(x)$, denn sie verschwindet offenbar für $x=\alpha'$, aber $\omega[\beta'+\frac{1}{2}(a+b-a'-b')]$ ist auch gleich $\omega[\alpha'+\frac{1}{2}(a+b-a'-b')]$, weil die Summe der Argumente gleich $\alpha'+\beta'+a+b-a'-b'=$

$a+b+2mK+2niK'$ (nach XXVIII.) ist und weil nach demselben Satze $\omega(x)$ für Werthe der Veränderlichen, die um $a+b$ und ganze Multipla von Perioden von einander verschieden sind, dieselben Werthe annimmt. Also verschwindet der Zähler des Quotienten $F(x)$ auch für $x=\beta'$. Aus denselben Gründen wird der Nenner der Function $F(x)$ in den Puncten $x=a'$ und $x=b'$ Null, und mithin $F(x)$ unendlich gross erster Ordnung*), während da, wo $\omega[x+\frac{1}{2}(a+b-a'-b')$ unendlich wird, endlich bleibt. Daraus folgt, dass $\varphi(x) = \text{Const.}\, F(x)$ ist, wenn noch der Satz bewiesen wird:

Hilfssatz. *Zwei doppelt periodische Functionen, die in denselben Puncten in gleicher Ordnung verschwinden und unendlich werden, sind nur durch einen constanten Factor von einander verschieden.*

Da der Quotient zweier solchen Functionen eine doppelt periodische Function ist, die nirgend unendlich wird, so ist dieselbe nach XXVII. constant, und mithin dieser Hilfssatz richtig.

Die Differenz zweier doppelt periodischen Functionen, die dieselben Perioden haben und in denselben Puncten unendlich gross erster Ordnung werden, und in diesen Puncten dieselben Residuen haben, ist eine doppelt periodische Function, die nirgend unendlich wird, und ist folglich constant, woraus der Satz fliesst:

Eine doppelt periodische Function ist durch die Puncte, für welche sie unendlich gross erster Ordnung wird, und durch die Residuen in diesen Puncten bis auf eine additive Constante, welche willkürlich bleibt, völlig bestimmt.

Wird sie in einzelnen Puncten in höherer Ordnung unendlich, so tritt eine leichte Modification ein.

XXX. *Eine doppelt periodische Function n^{ter} Ordnung lässt sich als Produkt von $n-1$ linearen Factoren durch eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung mit denselben Perioden ausdrücken, wobei jedoch die Argumente der in den verschiedenen Linearfactoren enthaltenen Functionen um eine Constante von einander verschieden sind.*

---

*) Dass eine doppelt periodische Function, die nur in zwei Puncten eines Parallelogramms unendlich gross erster Ordnung wird, auch nur in zwei Puncten unendlich klein erster Ordnung oder in einem unendlich klein zweiter Ordnung wird, ist eine unmittelbare Folge der zum Satze XXVI. gebrauchten Beweisgründe.

Wird nämlich die Function $\varphi(x)$, die mit $\omega(x)$ dieselben Perioden hat, in den Puncten $v', v'', \ldots v^{(n)}$ Null, und in den Puncten $u', u'', \ldots u^{(n)}$ unendlich gross erster Ordnung, so wird das Produkt aus $n-1$ linearen Factoren:

$$F(x) = \frac{\omega(x+s_1)-\omega(v'+s_1)}{\omega(x+s_1)-\omega(u'+s_1)} \cdot \frac{\omega(x+s_2)-\omega(v''+s_2)}{\omega(x+s_2)-\omega(u'''+s_2)} \cdots$$
$$\cdots \frac{\omega(x+s_{n-1})-\omega(v^{(n-1)}+s_{n-1})}{\omega(x+s_{n-1})-\omega(u^{(n)}+s_{n-1})}$$

in denselben Puncten Null und unendlich erster Ordnung, als die Function $\varphi(x)$, wenn $s_1 = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}(u'+u'')$, $s_2 = s_1 + \frac{1}{2}(v'-u''')$, $s_3 = s_2 + \frac{1}{2}(v''-u''')$,... angenommen wird*), und unterscheidet sich deshalb von $\varphi(x)$ nur durch einen constanten Factor. Es macht keine besonderen Schwierigkeiten von den Puncten $u', u'', \ldots$ oder $v', v'', \ldots$ einige zusammenfallen zu lassen.

Hieraus geht hervor, dass eine Theorie der doppelt periodischen Functionen sich vorzüglich mit den Functionen zweiter Ordnung zu beschäftigen haben wird, und unter diesen wird man noch diejenigen vorziehen können, die man für die einfachsten hält, weil sich alle übrigen durch diese ausdrücken lassen.

Die einfachste doppelt periodische Function zweiter Ordnung mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ ist vielleicht eine Function $p(x)$, welche nur in einem Puncte des Perioden-Parallelogramms, etwa im Puncte $x=0$, unendlich gross zweiter Ordnung wird. Sie wird dann für alle Werthe von x von der Form $x = 2mK + 2inK'$ unendlich gross zweiter Ordnung. Ist der Grenzwerth $\lim x^2 . p(x) = 1$ für $x=0$, so ist wegen der Periodicität auch $\lim (x - 2mK - 2inK')^2 p(x) = 1$ für $x = 2mK + 2niK'$. Durch diese Eigenschaften ist $p(x)$ bis auf eine Constante bestimmt.

In der Umgebung des Punctes $x = 2mK + 2niK'$ ist nun

$$p(x) - \frac{1}{(x-2mK-2niK')^2} = \omega(x)$$

eine Function vom Charakter $f(x)$, denn $\omega(x)$ könnte dort nur noch unendlich gross erster Ordnung werden, was aber nicht möglich ist, weil das Residuum von $p(x)$ im Puncte $2mK + 2inK'$ nach dem Hilfssatz auf Seite 61 Null sein muss.

Demnach müsste der Ausdruck

*) Hierin ist s die Summe der beiden Werthe, für welche $\omega(x)$ verschwindet oder unendlich wird.

$$p(x) - \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^2_{m,n} \frac{1}{(x-2mK-2niK')^2}$$

eine für alle endliche Werthe von x endliche Function vom Charakter $f(x)$ sein, wenn die Doppelsumme eine für alle x convergente Reihe wäre. Dies ist nun zwar nicht der Fall. Allein man kann diese zweifache unendliche Summe durch additive Hinzufügung einer Constanten leicht in eine absolut und folglich unbedingt convergente*) Reihe verwandeln nach einer Methode, welche von Eisenstein herrührt, der sie zuerst auf zweifach unendliche Produkte im Crelle'schen Journale Bd. 35 p. 185 seqq. angewendet hat. Setzt man nämlich für das allgemeine Glied unserer Doppelsumme den Ausdruck

$$A_{m,n} = \frac{1}{(x-2mK-2inK')^2} - \frac{1}{(2mK+2inK')^2}$$

und nur $A_{0,0} = 1 : x^2$, so ist nach bekannten Principien der Convergenz mehrfach unendlicher Reihen die zweifach unendliche Reihe $\Sigma A_{m,n}$, wenigstens so lange K und iK' in einem complexen nicht rein reellen Verhältnisse zu einander stehen, eine absolut convergente Reihe, die überdies die Perioden $2K$ und $2iK'$ besitzt, so dass mit Rücksicht darauf, dass eine doppelt periodische Function, die in einem Perioden-Parallelogramm nicht unendlich wird, constant ist,

$$p(x) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^2_{m,n} \left\{\frac{1}{(x-2mK-2niK')^2} - \frac{1}{(2mK+2niK')^2}\right\}$$

gesetzt werden kann, wenn für das Glied $m=0$, $n=0$ dieser Doppelsumme $1 : x^2$ gesetzt wird.

Die doppelte Periodicität aber ergiebt sich in folgender Weise. Es ist, μ und ν als ganze Zahlen vorausgesetzt,

$$p(x+2\mu K+2\nu iK')$$
$$= \left(\sum\right)^2 \left\{\frac{1}{[x-2(m-\mu)K-2(n-\nu)iK']^2} - \frac{1}{(2mK+2niK')^2}\right\}$$
$$= \left(\sum\right)^2 \left\{\frac{1}{(x-2mK-2niK')^2} - \frac{1}{[2(m+\mu)K+2(n+\nu)iK']^2}\right\},$$

---

*) Wird ein einzelner Term unendlich, so ist wenigstens die Summe der übrigen convergent. Das Kriterium für die absolute Convergenz einer zweifach unendlichen Reihe $(\Sigma)^2_{m,n} A_{m,n}$ ist das, dass sich eine positive, übrigens beliebig kleine Grösse σ finden lasse, so dass für

welche letzte Gleichung aus der vorhergehenden dadurch hervorgegangen ist, dass für die Summationsbuchstaben m und n neue durch die Gleichungen $m = m' + \mu$, $n = n' + \nu$ eingeführt und nachher die Striche wieder fortgelassen sind, oder dass eine veränderte Zählung der Terme eingeführt ist. Somit kann die Differenz $p(x + 2mK + 2\nu iK') - p(x)$ in den beiden Formen geschrieben werden,

$$\left(\sum\right)^2 \left\{\frac{1}{[x - 2(m-\mu)K - 2(n-\nu)iK']^2} - \frac{1}{(x - 2mK - 2niK')^2}\right\}$$

und

$$\left(\sum\right)^2 \left\{\frac{1}{(2mK + 2niK')^2} - \frac{1}{[2(m+\mu)K + 2(n+\nu)iK']^2}\right\},$$

je nachdem man bei der Subtraction die eine oder die andere der oben für $p(x + 2\mu K + 2niK')$ aufgestellten Summen anwendet.

Aus der zweiten Form dieser Differenz geht hervor, dass sie constant ist, die erste Form aber liefert für $x = -\mu K - \nu iK'$ (weil sie von der speciellen Wahl von x unabhängig ist)

$$p(x + 2\mu K + 2\nu iK') - p(x) =$$

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^{(2)}_{m,n} \left\{\frac{1}{[2(m-\frac{1}{2}\mu)K + 2(n-\frac{1}{2}\nu)iK']^2} - \frac{1}{[2(m+\frac{1}{2}\mu)K + 2(n+\frac{1}{2}\nu)iK']^2}\right\}.$$

Nimmt man nun in dieser Summe das Glied m, n und das Glied $-m$, $-n$ zusammen, so heben sie sich genau auf, so dass diese Differenz Null, oder

$$p(x + 2\mu K + 2\nu iK') = p(x)$$

ist, w. z. b. w.

Die Function $-p(x)$ ist der zweite Differentialquotient des Logarithmus des zweifach unendlichen absolut convergenten Produktes

$$\sigma(x) = x \prod\prod \left(1 - \frac{x}{2mK + 2niK'}\right) e^{\frac{x}{2mK + 2niK'} + \frac{\frac{1}{2}x^2}{(2mK + 2niK')^2}}$$

(worin m und n alle positiven und negativen ganzen Zahlen sind, und nur der Factor, der $m = 0$, $n = 0$ entspricht, fortzulassen ist,) so dass also

$$\frac{d^2 \lg \sigma(x)}{dx^2} = -p(x)$$

---

wachsende m oder n, oder m und n $\lim A_{m,n} . (m.n)^{1+\sigma}$ endlich bleibt. Dasselbe muss auch mit $\lim A_{m,0}\, m^{1+\sigma}$ und $\lim A_{0,n}\, n^{1+\sigma}$ stattfinden.

ist. Diese Function $\sigma(x)$ besitzt gar keine Perioden, sondern dafür die Eigenschaften

$$\sigma(x+2K) = -e^{2\eta(x+K)}.\sigma(x),$$
$$\sigma(x+2iK') = -e^{2i\eta'(x+K')}.\sigma(x),$$

worin $(m, n \gtreqless 0, 0)$

$$\eta = \sum \frac{K}{(2mK+2niK')^2} = \frac{\sigma'(K)}{\sigma(K)},$$
$$\eta' = \sum \frac{K'}{(2mK+2niK')^2} = \frac{\sigma'(iK')}{i\sigma(iK')}.$$

Durch Quotienten von σ-Functionen, deren Argumente sich um Constante unterscheiden, multiplicirt mit einfachen Factoren der Exponentialfunction kann man jede doppelt periodische Function mit den Perioden $2K$, $2iK'$ ausdrücken, worauf wir jedoch augenblicklich nicht eingehen. Denn die hier aufgestellten σ-functionen, auf welche Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen ebenso wie auf die p-Function die Theorie der doppelt periodischen Functionen aufzubauen pflegt, unterscheiden sich, wie wir später sehen werden, von den ϑ-Functionen, denen der zweite Theil dieses Buches gewidmet ist, nur durch einen einfachen exponentiellen Factor, weshalb es hier genügen mag, noch die Differentialgleichung für die Function $p(x)$ aufzustellen.

Die Function

$$p'(x) = \left(\sum\right)^{(2)}_{m,n} \frac{-2}{(x-2mK-2nK')^3}$$

wechselt mit x ihr Zeichen, während $p(-x) = p(x)$ ist, was daraus folgt, dass in der Doppelsumme zu jeder Combination m, n auch eine Combination $-m$, $-n$ vorhanden ist. Aus demselben Grunde ist $p'(K) = 0$, $p'(iK') = 0$, $p'(K+iK') = 0$. Für $x = 2mK + 2niK'$ wird $p'(x)$ unendlich gross dritter Ordnung und die Differenz $p'(x) - [-2 : (x-2mK-2niK')^3]$ bleibt dort endlich. Da also die doppelt periodische Function $p'(x)$ im Elementar-Parallelogramm mit den Ecken 0, $2K$, $2iK'$, $2K+2iK'$ nur für $x = 0$ in dritter Ordnung unendlich wird*), so verschwindet $p'(x)$ nur für $x = K$, iK', $K+iK'$. Da die Summe der Werthe, für welche $p(x)$ in einem Parallelogramm dieselben

*) Von den Ecken darf immer nur eine als zum Parallelogramm gehörend angesehen werden, denn bringt man durch eine kleine Ausbiegung eine Ecke ins Innere, so fallen die andern sofort heraus.

Werthe annimmt, congruent Null ist, so müssen die doppelt periodischen Functionen (confer. XXVIII.) $p(x)-p(K)$, $p(x)-p(iK')$, $p(x)-p(K+iK')$ bez. für $x=K, iK', K+iK'$ unendlich klein zweiter Ordnung werden, und demnach wird das Produkt $\overline{p(x)-p(K)}.\overline{p(x)-p(iK')}.\overline{p(x)-p(K+iK')}$ genau in denselben Puncten und in denselben Ordnungen Null und unendlich, als die Function $[p'(x)]^2$ und kann sich deshalb von ihr nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Multiplicirt man beide Ausdrücke mit x^6 und vergleicht sie für $x=0$, so findet man

$$[p'(x)]^2 = 4.\overline{p(x)-p(K)}\,.\,\overline{p(x)-p(iK')}\,.\,\overline{p(x)-p(K+iK')}$$

oder

$$p'(x) = 2\sqrt{\overline{p(x)-p(K)}.\overline{p(x)-p(iK')}.\overline{p(x)-p(K+iK')}}.$$

Es ist eine allgemeine Eigenschaft der doppelt periodischen Functionen zweiter Ordnung, dass das Quadrat ihrer Derivirten durch einen Ausdruck dritten oder vierten Grades der Function selbst darstellbar ist. Um aber diese Eigenschaft für die Theorie der doppelt periodischen Functionen nutzbar zu machen, ist es nöthig, weil sie zwischen $p'(x)$ und $p(x)$ eine mehrdeutige Beziehung liefert, die allgemeinen Sätze über eindeutige complexe Functionen auf mehrdeutige auszudehnen, was nun geschehen soll.

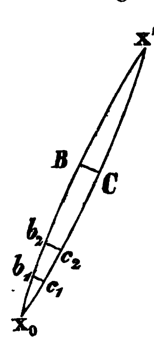
In allen bisher über eine Function der complexen Variabeln x ausgesprochenen Sätzen ist nämlich vorausgesetzt worden, dass diese Function in dem Gebiete, in welchem sie betrachtet wird, eindeutig bestimmt sei, oder, wie man sagt, dass sie eine einwerthige Function von x sei. Sollen diese Sätze Anwendung auf mehrwerthige Functionen, wie $\sqrt{x}$, $\lg x$, etc. finden, so muss die Mehrdeutigkeit für Gebiete, in welchen sie betrachtet werden sollen, in irgend welcher Weise beseitigt werden. Dies geschieht nach Riemann durch Zerlegung mehrwerthiger Functionen in einwerthige Zweige. Die Werthe einer mehrwerthigen Function sind im Allgemeinen für ein bestimmtes x um ein Endliches von einander verschieden, und nur in einzelnen Puncten fallen zwei oder mehrere Werthe zusammen, oder werden gleichzeitig unendlich gross. Denn fielen die Werthe längs eines noch so kleinen Linienstückes zusammen, so müssten sie nach Satz XVI. überhaupt zusammenfallen, wenn anders eine Fortsetzung als Function der complexen Variabeln x möglich ist.

Es findet aber diese Singularität für einzelne Puncte z. B. bei der zweiwerthigen Function $\sqrt{x}$ für $x=0$ und für $x=\infty$ statt. Verbindet man nun alle die Puncte der x-Ebene, für welche von den verschiedenen Werthen einer mehrdeutigen Function $\omega(x)$ zwei oder mehrere zusammenfallen, durch eine Linie q, welche die Ebene nicht in getrennte Stücke zerlegt und demnach weder geschlossen sein, noch sich selbst irgendwo schneiden darf, so wird dadurch, dass man die beiden Ufer der Linie als Begrenzung der Ebene ansieht, von der Ebene kein Theil ausgeschlossen, sondern nur der Art der Bewegung eines Punctes in derselben eine gewisse Schranke gesetzt. Wählt man dann für einen bestimmten Punct der Ebene von den verschiedenen Werthen von $\omega(x)$ einen aus, so wird über die stetige Fortsetzung der Function (wenn solche möglich ist) von dieser Stelle aus durch die ganze x-Ebene nirgend ein Zweifel entstehen, wenn nur die Fortsetzung über keinen Theil der Linie q hinweg geschieht. Ist an der Stelle $x=x_1$ $\omega(x)=X_1=\omega(x_1)$ aus den als verschieden vorausgesetzten Werthen $X_1, X_1', X_1'', \dots X_1^{(n)}$ ausgewählt, und hat für $x=x_2$ $\omega(x_2)$ die Werthe $X_2, X_2', X_2'', \dots X_2^{(n)}$, und liegt x_2 nicht auf q, so sind diese Werthe alle um eine Grösse von einander verschieden, deren absoluter Betrag eine bestimmte angebbare Zahl, etwa 2δ, jedenfalls übersteigt, weil nur für Puncte der Linie q die verschiedenen Werthe von $\omega(x)$ unendlich wenig von einander verschieden sein können. Man wird aber den Punct x_2 so nahe an x_1 rücken können, wenn anders $\omega(x)$ dort stetig ist, dass die Werthe $X_2, X_2', X_2'', \dots X_2^{(n)}$ denen $X_1, X_1', X_1'', \dots X_1^{(n)}$ so zugeordnet werden können, dass die Differenzen X_2-X_1, $X_2'-X_1', \dots X_2^{(n)}-X_1^{(n)}$ ihrem absoluten Betrage nach dort kleiner als δ sind, während der absolute Betrag der übrigen Differenzen $X_2'-X_1$, $X_2''-X_1$, etc. grösser als δ ist, wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit von $X_1, X_1', X_1'', \dots X_1^{(n)}$. Demnach schliesst sich nur ein einziger Werth X_2 an den Werth X_1 stetig an, und es ist daher die stetige Fortsetzung von $\omega(x)$ eindeutig bestimmt. Hieraus ergiebt sich zur Festlegung eines eindeutigen Zweiges einer mehrwerthigen, im Allgemeinen stetigen, nur da, wo sie unendlich wird, unstetigen, Function folgende Regel:

XXXI. *Um eine mehrwerthige Function der complexen Variabeln x in einwerthige Zweige zu zerlegen, verbinde man alle*

diejenigen Puncte, für welche von den verschiedenen Werthen von $\omega(x)$ zwei oder mehrere einander gleich oder gleichzeitig unendlich werden, durch eine die x-Ebene nicht zerstückelnde Linie q, wähle dann für einen Punct x_0 einen der verschiedenen Werthe von $\omega(x_0)$ etwa X_0 aus und betrachte für $x = x'$ denjenigen Werth von $\omega(x')$ als zu demselben Zweige wie $\omega(x_0) = X_0$ gehörend, welchen man dadurch erhält, dass man eine, die Linie q nirgend überschreitende Linie s von x_1 nach x' zieht und nun mit stetigem Vorrücken der Variabeln x längs s gleichzeitig die stetige Aufeinanderfolge der Werthe $\omega(x)$ bildet, bis man zu dem Werthe $\omega(x')$ gelangt.

Geht man von x_0 nach x' auf zwei einander sehr nahe liegenden Wegen x_0Bx', x_0Cx', welche beide die Linie q nirgend überschreiten, und zerlegt diese Wege in sehr kleine Elemente, deren Endpuncte $b_1, b_2, \ldots$, von den entsprechenden $c_1, c_2, \ldots$ sehr wenig entfernt sind, so wird man durch stetige Fortsetzung der Function $\omega(x)$ von dem Werthe $\omega(x_0)$ in b_1 zu demselben Werthe gelangen auf dem Wege x_0b_1, als auf dem Wege $x_0c_1b_1$, da sich die beiden Werthe wegen der Stetigkeit der Function $\omega(x)$ nur sehr wenig von einander unterscheiden könnten, aber Werthe von $\omega(x)$, die sich beliebig wenig von einander unterscheiden, im Puncte b_1 nicht vorhanden sind, weil dies nur für einzelne Puncte der Linie q statt hat.



Geht man nun von b_1 nach b_2 einmal direct, ein andermal über c_1c_2 nach b_2, so wird man aus demselben Grunde in b_2 beidemale zu einem und demselben Werthe von $\omega(x)$ gelangen, d. h. also in b_2 auf dem Wege x_0, b_1, b_2 zu demselben Werthe als auf dem Wege $x_0, c_1, b_1, c_1, c_2, b_2$, oder da der Schritt c_1, b_1 vor- und wieder zurückgethan wird, auf dem Wege x_0, c_1, c_2. Hieraus ergiebt sich unter successiver Anwendung derselben Schlussweise, dass man auf dem Wege x_0, B, x' und x_0, C, x' durch stetige Fortsetzung von $\omega(x)$ zu einem und demselben Werthe in x' gelangt. Dasselbe gilt natürlich auch für Wege, die ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Ebenenstück einschliessen, aber kein Stück der Linie q enthalten, weil man diese Wege durch all-

mälige sehr geringe Veränderung ihrer Gestalt in einander übergehen lassen kann. In Folge hiervon heisst die Function $\omega(x)$ in dem durch q beschränkten Gebiete auch einändrig oder monodrom.

Zu beiden Seiten der Linie q wird aber ein Zweig der Function $\omega(x)$ im Allgemeinen von einander um ein Endliches verschiedene Werthe annehmen, also unstetig sein, wenngleich die Function eine stetige Fortsetzung über diese Linie hinaus zulässt, welche Fortsetzung dann Werthe liefert, die einem zweiten Zweige der Function angehören. Die Zweige einer stetigen Function aber setzen sich längs Linien in einander stetig fort.

Hierzu einige Beispiele. Die Function

$$\omega(x) = \lg(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

ist eine unendlich vieldeutige Function, da man in demselben Puncte x, wie wir schon früher sahen, je nach dem Integrationswege zu Werthen von x gelangen kann, die um beliebige ganze Multipla von $2\pi i$ von einander verschieden sind. Aber die Zerlegung dieser Function in eindeutige Zweige ist gerade recht einfach. Zieht man nämlich vom Puncte $x = 0$ bis zum Puncte $x = \infty$ eine beliebige Linie q, die sich nicht selbst schneidet, und betrachtet diese als Begrenzung der x-Ebene, so bildet die so begrenzte Ebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet S, in dessen Innerm die zu integrirende Function $1 : x$ endlich, und mithin (Satz VI.) $\lg x = \int_1^x \frac{dx}{x}$ eine endliche und eindeutige Function der complexen Veränderlichen x ist. Für die Linie q wählen wir die positive y-Achse und setzen fest, dass $\lg x$ auf dem positiven Ufer von q, d. i. auf der Seite, welche für die Richtung von 0 nach ∞ die linke ist, für $x = 1$ verschwindet. In dem auf dem andern Ufer von q zu $x = 1$ gehörenden Puncte hat dann $\lg x$ den Werth $2\pi i$ (Satz VII.), und ein Zweig der Function $\lg x$, wir wollen ihn den Hauptzweig (S) nennen, ist völlig definirt. Ist nämlich $x = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, so ist der Hauptwerth von $\lg x$, d. h. der zum Hauptzweig gehörende Werth, gleich $\vartheta i + \lg r$, worin ϑ ein Winkel zwischen 0 und 2π, und $\lg r$ eine reelle Zahl ist. Denn da es gleichgiltig ist, auf welchem in S liegenden Wege wir von 1 nach x hin integriren, so können

wir von x nach r über die positive reelle Achse (auf dem positiven Ufer von q) integriren, und dann auf dem Bogen eines Kreises, der mit dem Radius r um den Punct 0 geschlagen wird, vom Puncte $x = r$ bis zum Puncte $x = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ integriren, dann hat man

$$\lg x = \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^r \frac{dy}{y} + i\int_0^\vartheta d\vartheta = \lg r + \vartheta i.$$

Das Integral $\int_1^x \frac{dx}{x}$ ändert sich aber auf jedem Integrationswege, der nicht durch den Punct $x = 0$, oder $x = \infty$ geht, stetig, und da es in einem Puncte denselben Werth erhält, welchen in S gelegenen Integrationsweg man auch einschlagen mag, so kann man sagen, die Function $\lg x$ erhält in einem Puncte von S immer einen und denselben Werth, wenn sie von der Stelle $x = 1$ ($\lg x = 0$) ab bis zu der Stelle $x = x$ längs irgend eines Weges in S so fortgesetzt wird, dass mit der stetigen Aenderung von x eine stetige Aenderung von $\lg x$ verknüpft ist.

Wir untersuchen nun die Gesammtheit der Werthe, welche $\omega = \lg x$ annimmt, wenn x in S herum geführt wird. Das Integral $\int_1^x \frac{dx}{x}$ bis zu irgend einem Puncte auf dem positiven Ufer von q, der Träger einer grösseren Zahl als 1 ist, erstreckt, hat einen positiven reellen Werth. Denn wählt man als Integrationsweg die reelle Achse (y-Achse), so sind alle Elemente reell und positiv, und mithin wächst $\lg x$ von $x = 1$ an mit reellem wachsenden x immer reell bleibend fort und fort und zwar zuletzt über alle Grenzen. Denn setzt man

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \ldots \int_{\nu-1}^\nu \frac{dx}{x} + \int_\nu^x \frac{dx}{x},$$

wenn $\nu > x \equiv \nu + 1$ ist, und beachtet, dass

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} > \frac{1}{2}, \int_2^3 \frac{dx}{x} > \frac{1}{3}, \ldots \int_{\nu-1}^\nu \frac{dx}{x} > \frac{1}{\nu}$$

ist, so folgt

$$\int_1^x \frac{dx}{x} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}$$

und es wächst also dies Integral mit ν, also mit x über alle

Grenzen, weil die harmonische Reihe ∞ zur Summe hat. Also entsprechen den Puncten der reellen Achse der x-Ebene, welche Träger grösserer Zahlen als der Eins sind, in der $\omega = u + vi$-Ebene alle Puncte der positiven reellen Achse (u-Achse) von 0 bis $+\infty$ und zwar jedem Puncte x ein Punct ω, und jedem Puncte ω ein Punct x. Denn da $\omega = \lg x$ nur zunimmt nie abnimmt, während x von 1 bis ∞ wächst, so kann ω keinen Werth zwischen 0 und ∞ zweimal annehmen.

Durchläuft x alle Puncte auf dem positiven Ufer von 1 bis 0, so ist dabei dx negativ. Das Integral $\int_1^x \frac{dx}{x}$ nimmt immer ab und ist reell. Eine ähnliche Schlussfolge wie die obige, oder die Substitution $x = 1:\xi$, durch welche $\lg x$ in $-\lg \xi$ übergeht, zeigt, dass $\lg x$, wenn x von $x = 1$ bis $x = 0$ immer reell bleibend abnimmt, alle reellen Zahlen von 0 bis $-\infty$ einmal und nur einmal durchläuft. Demnach entsprechen allen Puncten der positiven y-Achse auf dem positiven Ufer von q zwischen 0 und ∞ alle Puncte der reellen Achse in der ω-Ebene von $-\infty$ bis $+\infty$ einmal und nur einmal und umgekehrt.

Den Punct der ω-Ebene, welcher einem beliebigen Puncte der x-Ebene entspricht, wenn diese durch die Linie q begrenzt gedacht wird, der also zum Hauptzweig gehört, erhält man aus der Gleichung

$$\omega = \lg x = \vartheta i + \lg r,$$

wo $x = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ gesetzt ist. So entsprechen den Puncten des negativen Ufers von q alle Puncte einer Linie in der ω-Ebene, die der u-Achse parallel ist, und die v-Achse im Puncte $\omega = 2\pi i$ ($v = 2\pi$) trifft, weil dort $x = r(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$ ist, oder weil

der Logarithmus um $2\pi i$ wächst, wenn x von einem Puncte auf dem positiven Ufer von q um den Punct 0 herum auf das negative zu demselben Puncte geführt wird. Den gegenüberliegenden Puncten der Linie q in der x-Ebene entsprechen in der ω-Ebene gegenüberliegende Puncte der beiden durch die Gleichungen $v=0$, und $v=2\pi$ in rechtwinkligen Coordinaten (u, v) gegebenen parallelen Linien. Zieht man um den Anfangspunct der Coordinaten mit dem Radius ϱ einen Kreis, so entsprechen den Puncten dieses Kreises die Puncte der der v-Achse parallelen Strecke zwischen $\omega = \lg\varrho$ und $\omega = \lg\varrho + 2\pi i$ einmal und nur einmal, weil der Punct ω auf dieser Strecke immer nur vorwärts rückt, während x auf jener Peripherie vorwärts geht. Dieser Kreis schneidet die beiden Ufer von q rechtwinklig, die Strecke die diesen Ufern entsprechenden Linien (u und $u+2\pi i$) ebenfalls. Dem Einheitskreise entspricht die v-Achse zwischen 0 und $2\pi i$. Den Puncten ausserhalb des Einheitskreises entsprechen Puncte mit positiv reellem Theile, den innern Puncten Puncte mit negativ reellem Theile. Den Puncten einer Geraden der x-Ebene durch den Anfangspunct, welche mit der y-Achse den Winkel α bildet, entsprechen die Puncte einer der u-Achse parallelen Geraden, welche die v-Achse im Punct $v=\alpha$ oder $\omega = \alpha i$ trifft ($u + \alpha i$ in der Zeichnung), und zwar jedem Punct der einen Linie ein Punct und nur ein Punct der andern. Daraus geht hervor, dass jedem Puncte des Gebietes S, d. h. der durch q begrenzten x-Ebene ein Punct und nur ein Punct des Parallelstreifens der ω-Ebene zwischen der u-Achse und der Linie $v = 2\pi$ entspricht und umgekehrt. Ausserdem besteht überall in diesen Gebieten Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen, so dass entsprechende Curven sich unter gleichen Winkeln schneiden, wie wir schon oben bei einem Kreise sahen, ausgenommen an den Stellen $x=0$ und $x=\infty$, weil an der einen Stelle $\omega'(x) = 1:x$, ∞ an der andern 0 wird.

Setzt man nun die Function $\omega(x) = \lg x$ über die Linie q hinweg stetig fort, z. B. zunächst so, dass man x vom Puncte 1, wo $\omega = 0$ ist, in einer beliebigen Curve in S um den Punct 0 herum aufs negative Ufer von q führt, und mit Beibehaltung des dort erlangten Werthes von $\lg x$ über q hinweg zum Puncte x fortschreitet, so erhält man dort einen Werth von $\lg x$, der von dem Werthe, der zu S gehört, um $2\pi i$ verschieden ist. Führt

man nun wieder x in der ganzen Ebene herum, ohne q zu überschreiten, so erhält man überall vollkommen bestimmte Werthe, die zusammen einen zweiten Zweig der Function $\lg x$ ausmachen, wir wollen ihn mit S_1 bezeichnen. Die stetige Fortsetzung besteht also darin, dass man S_1 auf dem positiven Ufer von q die Werthe giebt, die S auf dem negativen hat. Dieser Zweig bildet sich in der ω-Ebene auf den Streifen zwischen den Linien $v = 2\pi$, und $v = 4\pi$ (in der Zeichnung $u+2\pi i$, $u+4\pi$), welcher sich lückenlos an den früheren Streifen anschliesst, ab. Setzt man diesen Zweig in derselben Weise über die Linie q fort, indem man dem Zweige S_2 die Werthe auf dem positiven Ufer von q zukommen lässt, welchen S_1 auf dem negativen hat, so bildet sich dieser Zweig auf den Streifen zwischen $v = 4\pi$ und $v = 6\pi$ ab, etc. Ebenso gelangt man zu einem neuen Zweige der Function $\lg x$, den man mit S_{-1} bezeichnen wird, indem man diesem Zweige auf dem negativen Ufer von q die Werthe zuertheilt, die S auf dem positiven hat. Die Werthe von $\lg x$ in Puncten dieses Zweiges unterscheiden sich dann von den Werthen des Hauptzweiges offenbar um $-2\pi i$, und es bildet sich dieser Zweig in der ω-Ebene auf den Streifen zwischen der Linie u und $u-2\pi i$ conform ab. Ebenso bildet man die Zweige S_{-2}, S_{-3} etc. Jeder Zweig S, S_1, $S_2, \ldots S_{-1}$, $S_{-2}, \ldots$ ist eine längs q unstetige Function von x, weil sich die Werthe derselben auf beiden Ufern um $2\pi i$ unterscheiden, während die gesammte Function $\lg x$ nur im Puncte $x = 0$, und $x = \infty$ unstetig ist, denn eben da, wo ein Zweig unstetig wird, setzt sich die Function $\lg x$ in einen benachbarten Zweig stetig fort. Entwickelt man z. B. den Hauptwerth von $\lg x$ nach Potenzen von $x-a$ in die Reihe

$$\lg x = \lg a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2 \cdot a^2} + \frac{(x-a)^3}{3 \cdot a^3} - + \ldots,$$

worin a zu einem Puncte auf dem positiven Ufer von q gehören mag, so convergirt die Reihe für alle Puncte im Innern eines Kreises, dessen Mittelpunct a ist, und dessen Radius a ist. In der einen Hälfte dieses Kreises gehört aber die durch die Reihe dargestellte Function zum Hauptzweige S, in dem Theile auf der negativen Seite von q zum Zweige S_{-1}, weil dieser die stetige Fortsetzung des Zweiges S in dieser Richtung ist und eine convergente Potenzreihe immer eine stetige Function darstellt. Die Linie q hat auf die Function $\lg x$ keinen directen Einfluss, sondern nur auf ihre Eintheilung

in Zweige. Durch Verschiebung dieser Linie werden Theile benachbarten Zweige zu andern Zweigen versetzt, ohne dass die Function selbst irgend welche Aenderung erlitte. Nimmt man z. B. die negativ imaginäre Achse zur Linie q und definirt den Hauptzweig durch die Gleichung $\lg 1 = 0$, so stellt die durch die obige nach Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe in ihrem ganzen Giltigkeitsbereiche den Hauptzweig von $\lg x$ dar, weil die ganze Viertelebene zwischen der positiv reellen und negativ imaginären Achse zum Hauptzweig vom früheren Zweige S_{-1} hinzugekommen ist, während ein entsprechender Theil vom früheren Zweige S an den neuen Zweig S_1 abgegeben ist. Alle Sätze über eindeutige Functionen gelten auch für die (eindeutigen) Zweige einer mehrdeutigen Function. Lässt man die Linie q ganz fort, d. h. theilt man die Function $\lg x$ nicht in eindeutige Zweige ein, so gehören offenbar zu einem Punkte x unendlich viele Werthe von $\omega = \lg x$ nämlich $\lg x + 2m\pi i$, wenn $\lg x$ ein auf irgend welchem Wege erlangter Werth von $\lg x$ und m eine beliebige ganze positive oder negative Zahl ist. Einem Punkte der x-Ebene entsprechen unendlich viele um 2π in imaginärer Richtung von einander abstehende Puncte, während umgekehrt einem Werthe von ω immer nur ein einziger Werth von x entspricht. Allen um $2\pi i$ von einander verschiedenen Werthen von ω entspricht ein und derselbe Werth von x. Wenn man also x als Function von ω ansieht, so ist x eine periodische Function von ω mit der Periode $2\pi i$, weil $x(\omega + 2\pi i) = x(\omega)$ ist. Man pflegt aber die Umkehrung von $\lg x = \omega$ mit $x = e^{\omega}$ zu bezeichnen, und erkennt die Uebereinstimmung dieser Function mit der gewöhnlichen Exponential-Function aus der Gleichung $e^{\omega_1} . e^{\omega_2} = e^{\omega_1 + \omega_2}$, die so bewiesen wird. Ist $e^{\omega_1} = x_1$, $e^{\omega_2} = x_2$, so ist $\omega_1 = \lg x_1$, $\omega_2 = \lg x_2$ und $\omega_1 + \omega_2 = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg x_1 . x_2$, also $x_1 . x_2 = e^{\omega_1 + \omega_2} = e^{\omega_1} . e^{\omega_2}$, w. z. b. w. Die fernere Rechnung ist bekannt (confer. pag. 36).

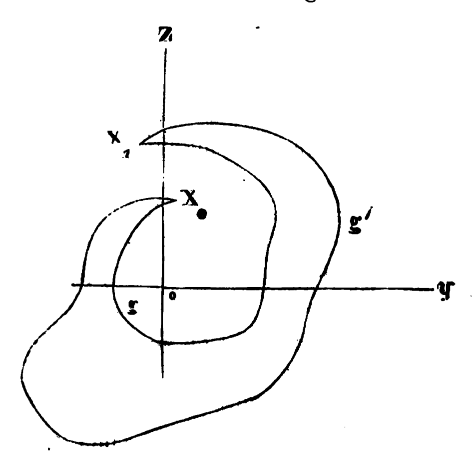
Als ein neues Beispiel der Zerlegung einer vieldeutigen Function in eindeutige Zweige wählen wir die n-werthige Function

$$\omega = x^{\frac{1}{n}}$$

worin zunächst n eine ganze Zahl sein mag. Ist für ein specielles x ω ein Werth dieser Function, so sind die übrigen in der Form $\omega\,(\cos 2\frac{m}{n}\pi i + i \sin 2\frac{m}{n}\pi i)$ enthalten, wenn m eine beliebige

ganze positive oder negative Zahl ist. Es giebt aber wegen der Periodicität der Cos- und Sinusfunction nur n verschiedene Werthe von ω für jedes x, und diese sind überall um ein Endliches von einander verschieden, ausser für $x = 0$ und $x = \infty$. Durchläuft x eine beliebige Gerade, welche durch den Punct $x = 0$ geht, so durchlaufen die Werthe von ω gleichzeitig n Gerade, welche alle durch den Punct $\omega = 0$ gehen, und in ihrer Richtung je um den Winkel $2\pi : n$ von einander verschieden sind. Ist der Winkel den die Gerade der x-Ebene mit der reellen Achse macht α, so sind die entsprechenden der ω-Ebene $(\alpha : n) + (2m\pi : n)$, worin man für m jede ganze Zahl nehmen kann, aber offenbar nur $0, 1, 2, \ldots n-1$ zu setzen braucht.

Ist die Function ω an der Stelle x_0 gleich ω_0 gegeben, d. h. ein bestimmter von den n dort möglichen Werthen für ω_0 ausgewählt, und ist ein Weg zwischen x_0 und x_1 gegeben, und will man wissen, zu welchem Werthe ω_1 von ω man gelangt, wenn man ω mit x längs dieses Wegs stetig abändert, so braucht man nur zu wissen, wie oft dieser Weg (g) sich um den Punkt $x = 0$ in der einen oder der anderen Richtung herumwindet. Man kann



nämlich diesen Weg (g) durch jeden andern (g') ersetzen, der sich eben so oft in derselben Richtung um den Nullpunkt windet. Denn in dem zwischen (g) und (g') liegenden Ebenenstücke findet sich kein Punkt vor, für welchen zwei der verschiedenen Werthe von ω zusammenfielen. Wollte man auf dem Wege (g)

nach der pag. 74. gegebenen Vorschrift mit x in so kleinen Abständen vorwärts gehen, dass man über die für die Reihenfolge der Puncte x zu wählenden Werthe von ω in Folge der stetigen Aufeinanderfolge derselben nirgend in Zweifel geriethe, so wäre dies jedenfalls ein complicirtes Verfahren. Ersetzt man aber den Weg g durch einen Weg h, der von $x_0 = r_0(\cos\vartheta_0 + i\sin\vartheta_0)$ bis zum Puncte $x' = r_1(\cos\vartheta_0 + i\sin\vartheta_0)$ aus einer Geraden besteht und vom Punct x' bis zum Punct $x_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ aus einem Kreisbogen, der sich ebenso oft als g um den Punct 0 herumwindet, so findet man auf diesem Wege den Werth ω_1, der durch stetige Fortsetzung erhalten wird, viel leichter. Denn auf dem Wege von x_0 bis x' ändert sich von $\omega = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{1}{n}\vartheta + i\sin\frac{1}{n}\vartheta)$ der absolute Betrag allein, und ω hat daher im Puncte x' den Werth

$$r_1^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2\mu}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2\mu}{n}\pi\right)\right]$$

wenn $\omega_0 = r_0^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2\mu}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2\mu}{n}\pi\right)\right]$ war, weil bekanntlich die reellen Werthe der $n$ten Wurzel aus einer reellen Grösse eine stetige Function bilden. Auf dem Wege von x' bis x_1 aber ändert sich ϑ allein, und wenn sich daher der Kreis m mal ganz um den Punct Null windet, so ist

$$\omega_1 = r_1^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\vartheta_1 + 2\frac{\mu+m}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\vartheta_1 + 2\frac{\mu+m}{n}\pi\right)\right]$$

weil $\cos\frac{1}{n}\vartheta$ und $\sin\frac{1}{n}\vartheta$ stetige Functionen von ϑ sind.

Solche Hilfsmittel, die stetige Fortsetzung einer mehrdeutigen Function zu finden, sind nur in speciellen Fällen vorhanden, im Allgemeinen muss man sich dazu der Taylor'schen Reihe, nach der Anleitung die auf Seite 45 gegeben ist, bedienen.

Zieht man nun in der x-Ebene eine beliebige sich nicht schneidende Linie q, welche die beiden einzigen singulären Puncte $x = 0$ und $x = \infty$ mit einander verbindet, und nehmen wir für q die positive y-Achse, nennen die so begrenzende Ebene S und setzen $\omega = 1$ für $x = 1$ auf dem positiven Ufer von q, so ist damit ein Zweig der n-werthigen Function $\omega(x)$ völlig definirt. Durchläuft x das positive Ufer von q, so durchläuft ω die positiv reelle Achse einmal und nur einmal, durchläuft x von 0 bis ∞

das negative Ufer von q, so durchläuft ω die Gerade, die mit der reellen Achse der ω-Ebene den Winkel $2\pi:n$ macht, einmal und nur einmal. Bezeichnen wir die Winkelfläche zwischen diesen beiden Geraden mit Σ, so entsprechen sich die Puncte von S und Σ eindeutig. Die ganze x-Ebene wird demnach durch den Zweig S der Function $\omega = x^{\frac{1}{n}}$ auf den $n$ten Theil der ω-Ebene, auf den Winkel Σ in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet, ausgenommen im Puncte $x = 0$ und $x = \infty$. Denn bildet man Σ auf S durch die Gleichung $x = \omega^n$ ab, so ist die Abbildung conform ausser für $\omega = 0$ $(x = 0)$ und $\omega = \infty$ $(x = \infty)$, weil ω^n eine Function der complexen Variabeln ω mit dem Charakter f in Σ ist. Ist aber Σ conform S, so ist auch S conform Σ.*) Setzt man die Function ω stetig über q in einen zweiten Zweig S_1 fort, indem man diesem Zweige auf dem positiven Ufer von q die Werthe zuertheilt, die der Hauptzweig S auf dem negativen hatte, so ist dieser nun völlig bestimmt. Es wird durch diesen zweiten Zweig S_1 die ganze x-Ebene auf einen Winkel Σ_1 der ω-Ebene (im Allgemeinen conform) abgebildet, der zwischen zwei Geraden liegt, die mit der reellen Achse der ω-Ebene die Winkel $2\pi : n$ und $4\pi : n$ machen, und der seine Spitze im Puncte Null hat, und sich lückenlos an den Winkel Σ anschliesst. In derselben Weise setzt sich der Zweig S_1 in den Zweig S_2 stetig fort u. s. w., bis man einen Zweig S_{n-1} erhält, welcher die x-Ebene auf eine Winkelfläche Σ_{n-1} der ω-Ebene abbildet, die zwischen einer Geraden durch den Anfangspunct, die mit der reellen Achse den Winkel $2\pi : n$ macht, und der reellen Achse selbst liegt. Setzt man auch diesen Zweig über q in derselben Weise stetig fort, so erhält man den Hauptzweig S wieder. Man kann natürlich auch den Hauptzweig S stetig so fortsetzen, dass man einen Zweig S_{-1} bildet, indem man diesen

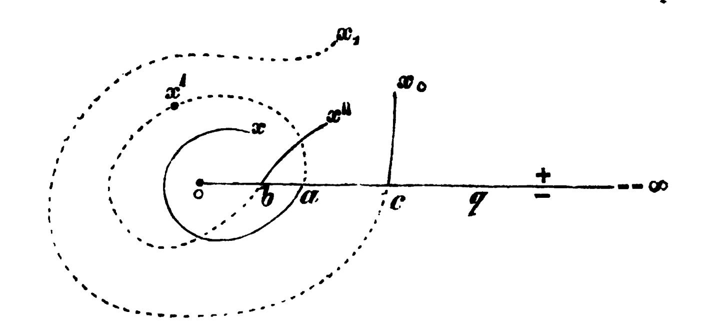
*) Das Innere der Winkelfläche Σ zwischen der positiven reellen Achse der ω-Ebene und der Geraden durch den Anfangspunct, welche mit ihr den Winkel $\pi:n$ macht, bildet sich durch die Function $x=\omega^n$ auf die Halbebene conform ab, welche wiederum durch reciproke Radii vectores (siehe pag. 23) auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann, so dass also die Winkelfläche mit dem Winkel $\pi:n$ leicht, (z. B. durch die Gleichung $x = \frac{(\xi - i)^n}{(\xi + i)^n}$) auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann.

auf dem negativen Ufer von q die Werthe zuertheilt, die S in denselben Puncten auf dem positiven Ufer hat, dieser Zweig ist aber offenbar identisch mit dem Zweig S_{n-1} und bildet die x-Ebene eindeutig auf die Winkelfläche Σ_{n-1} ab. Jedem Punkte der x-Ebene, wenn man den Zweig nicht angiebt, entsprechen n Puncte der ω-Ebene, wird aber noch der Zweig, dem er angehören soll, hinzugefügt, so entspricht ihm nur ein Punct der Ebene ω. Jedem Puncte ω entspricht ein Punct der x-Ebene, weil $x = \omega^n$ ist. Durchläuft aber ω einen um den Anfang der Coordinaten gezogenen Kreis mit dem Radius ϱ [also ist $\omega = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$], so durchläuft x einen Kreis mit dem Radius $r = \varrho^n$ (so dass also $x = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ist) n mal.

Auf die Zweige einer mehrdeutigen Function kann man, weil sie eindeutige Functionen sind, die früher für diese Classe von Functionen bewiesenen Sätze anwenden, und man reicht damit bei Behandlung mehrdeutiger Functionen vollkommen aus.

Bei Behandlung algebraischer Functionen ist es jedoch vielfach von grossem Nutzen, die Veränderliche x anstatt auf eine Ebene, auf eine sogenannte Riemann'sche Fläche zu beziehen.

Der Einfachheit halber sei $n = 2$, also $\omega = \sqrt{x}$, so dass diese Function aus nur zwei Zweigen besteht, die sich durch das Vorzeichen $\pm$ unterscheiden. Ueber der x-Ebene denken wir uns zwei Ebenen S, S_1 ausgebreitet, die beide durch die Linie q begrenzt sind, von denen also die eine den einen Zweig der Function $\sqrt{x}$, die andere den andern Zweig repräsentiren kann. Nun denke man sich aber die Linie q nicht als Begrenzung der beiden Ebe-



nen S und S_1, sondern nur als Bezeichnung für die Stelle, an welcher die eine Ebene in die andere stetig übergeht. Führt man den Punct x im obern Blatte S über die Linie q an der Stelle a in positiver Richtung d. h. vom negativen zum positiven Ufer, so geht derselbe in das untere Blatt S_1 über, wie in der Figur durch eine punctirte Linie angedeutet ist, und er befindet sich an der Stelle x' im Blatte S_1. Geht man an der Stelle b noch einmal in derselben Richtung über q, so gelangt der Punct in das obere Blatt oder den Zweig S zurück, und befindet sich im Punct x'' im oberen Blatte. In der That, setzt man $\omega = \sqrt{x} = r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\vartheta + i\sin\frac{1}{2}\vartheta)$ und durchläuft x einen Kreis vollständig, so dass ϑ um 2π wächst, so geht x einmal über q und ω erhält den Werth $r^{\frac{1}{2}}[\cos(\frac{1}{2}\vartheta + \pi) + i\sin(\frac{1}{2}\vartheta + \pi)] = -r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\vartheta + i\sin\frac{1}{2}\vartheta)$ also den zweiten Zweigwerth, und durchläuft ϑ diesen Kreis noch einmal, so erhält ω den Werth $r^{\frac{1}{2}}[\cos(\frac{1}{2}\vartheta + 2\pi) + i\sin(\frac{1}{2}\vartheta + 2\pi)] = r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\vartheta + i\sin\frac{1}{2}\vartheta)$, also den ersten Zweigwerth wieder. Geht man (bei c) über q vom positiven zum negativen Ufer, indem man etwa von x_0 ausgeht, und x nach x_1 hinführt, so gelangt man aus dem obern Zweig S in x_1 ebenfalls in den untern Zweig. In der That durchläuft ϑ die Werthe von ϑ bis $\vartheta - 2\pi$, so sind die beiden Werthe von ω die, zum Anfang und Endpunct gehören, $r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\vartheta + i\sin\frac{1}{2}\vartheta)$ und $r^{\frac{1}{2}}[\cos(\frac{1}{2}\vartheta - \pi) + i\sin(\frac{1}{2}\vartheta - \pi)]$, $= -r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\vartheta + i\sin\frac{1}{2}\vartheta)$, und gehören also verschiedenen Zweigen an, durch einen nochmaligen Umlauf gelangt man aber zum ersten Zweige zurück. Da man also durch zweimaliges Ueberschreiten der Linie q in derselben Richtung aus dem ersten Blatte ins zweite, und dann zum ersten Blatte zurückgelangt, so muss man annehmen, dass längs q sich das erste Blatt ins zweite, und dann in derselben Richtung wieder das zweite ins erste continuirlich fortsetzt, was nur möglich ist, wenn sich die beiden Blätter dort gegenseitig durchdringen. Diese Vorstellung macht dem Anfänger vielleicht Schwierigkeiten, weshalb besonders darauf aufmerksam gemacht wird. Ein Querschnitt, welcher auf der Linie q senkrecht steht, wird etwa die beigezeichnete Ansicht darbieten.

Diese, aus den beiden Blättern S und S_1 bestehende, die x-Ebene überall doppelt bedeckende Fläche, nennt man eine Riemann'sche Fläche. Die Ebene ω und die Fläche entsprechen sich eindeutig, denn obgleich zwei Werthe von ω zu einem Werthe von x gehören, so liegen doch zwei Puncte der Riemann'schen Fläche über jenem Puncte x der x-Ebene, und zu dem einen gehört der eine Werth von ω, zu dem andern der zweite Werth. Das eine Blatt bildet sich in die Halbebene (ω) ab, welche von der reellen Achse begrenzt wird, und die positiv imaginäre erhält, das andere Blatt auf die Halbebene, welche die negativ imaginäre Achse enthält.

XXXII. **Verzweigungspuncte.** *Fallen in einem Punkte zwei oder mehrere Werthe der mehrwerthigen Function $\omega(x)$ zusammen (so dass die im Allgemeinen n-werthige Function dort weniger als n verschiedene Werthe hat,) und ist ihr Werth auf dem einen Ufer einer von ihr ausgehenden Linie um ein Endliches verschieden von dem Werthe der stetigen Fortsetzung der Function auf dem andern Ufer dieser Linie, wenn diese Fortsetzung längs der natürlichen Begrenzung des Punctes geschieht, so heisst dieser Punct ein Verzweigungspunct der Function $\omega(x)$.*

Man sagt, ein Zweig einer Function setze sich um den Verzweigungspunct herum in einen zweiten Zweig fort, weil man dadurch den Punct x aus einem Zweige in den andern führt, dass man ihn um jenen Punct vollständig herumführt. Von Verzweigungspuncten kann man reden, gleichviel ob man eine Function in ihre einzelnen Zweige zerlegt, oder ob man diese Zweige zu einem einzigen Flächengebilde zusammenfügt. Für die Function $\lg x$ sind die Puncte $x = 0$, und $x = \infty$ Verzweigungspuncte, weil man durch jeden Umgang um einen dieser Puncte in einen neuen Zweig gelangt. Für die Function $\sqrt{x}$ sind ebenfalls 0 und ∞ die Verzweigungspuncte. Die Verzweigungspuncte gehören einer Function als Eigenthümlichkeiten an, während die sie verbindenden Linien q in vieler Beziehung der Willkür unterworfen sind. Fügt man die Zweige einer Function zu einer Riemann'schen Fläche zusammen, so kann man ein Stück der Fläche, welches einen Verzweigungspunct enthält, sich wie eine Schraubenfläche vorstellen, nur dass der letzte Schraubengang durch die andern hindurch sich in den ersten stetig wieder fortsetzt. Die Höhe des Schraubenganges kann man sich als verschwindend klein vorstellen. Windet sich die Fläche nur zweimal um einen solchen

Punct, so heisst er ein **einfacher Verzweigungspunct**, windet sie sich $\mu+1$ mal um diesen Punct, so heisst er ein μ-facher. Im ersten Falle gelangt man durch Herumgehen um den Punct in einen zweiten Zweig und beim zweiten Umgange in den ersten zurück. Im zweiten Falle gelangt man durch $\mu+1$ Umgänge der Reihe nach in einen zweiten, dritten, ..., $\mu+1$ten Zweig, und erst nach $\mu+1$ Umgängen in den ersten Zweig zurück. Der Verzweigungspunct $x=0$ der Function $\lg x$ ist ein unendlich vielfacher, weil man um ihn herum immer in neue Zweige gelangt. Man nennt solche Puncte auch **Windungspuncte**.

Um nun die bei mehrwerthigen Functionen auftretenden Verhältnisse noch näher an einem speciellen Beispiele kennen zu lernen, betrachten wir die zweiwerthige, für die Theorie der elliptischen Functionen besonders wichtige Function,

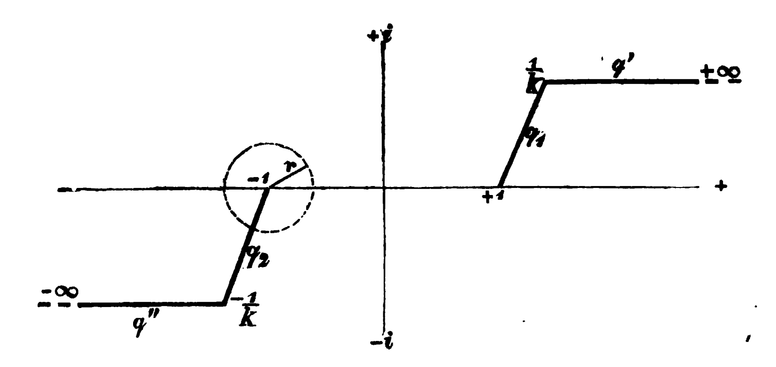
$$R(x) = \sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}.$$

sie zunächst in Zweige zerlegend, sodann aber auch diese Zweige zu einer Riemann'schen Fläche zusammenfügend. Die Puncte der x-Ebene, für welche die beiden im Allgemeinen verschiedenen Werthe von $R(x)$ in einen zusammenfallen, oder gleichzeitig unendlich werden, sind

$$x = 1, \quad -1, \quad \frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k}, \quad \infty.$$

Deshalb ziehen wir von 1 nach $\frac{1}{k}$ eine Gerade q_1 und ebenso eine Gerade q_2 von $-\frac{1}{k}$ bis -1, und von $\frac{1}{k}$ eine, etwa der positiven reellen Achse parallele Gerade q' ins Unendliche $(+\infty)$, und von $\frac{-1}{k}$ eine, etwa der negativen y-Achse parallele Gerade q'' ins Unendliche $(-\infty)$. Wir denken uns aber, wie früher festgesetzt wurde, die x-Ebene als die Oberfläche einer Kugel, deren Radius über alle Grenzen gross ist, so dass die Ebene als eine geschlossene Oberfläche anzusehen ist, welche einen und nur einen unendlich fernen Punct besitzt. Bei dieser Vorstellung treffen die Linien q' und q'' im unendlich fernen Puncte zusammen und bilden q_1, q', q'', q_2 zusammen einen einzigen continuirlichen Zug, der mit q bezeichnet werden soll, welcher die x-Ebene nicht zerstückelt. — Will man diese Vorstellung der Ebene nicht benutzen, so kann man q', q'' durch einen (unendlich) grossen Halb-

kreis geschlossen denken, was jedoch weit weniger bequem ist. — Nun definiren wir einen Zweig $R_1(x)$ so, dass für $x=0$ $R(x)$ den Werth 1 hat,



$[R_1(0)=1]$, den andern so, dass für $x=0$ $R(x)$ den Werth -1 hat $[R_2(0) = -1]$, und dass die stetigen Fortsetzungen von $R_1(x)$ und $R_2(x)$ nirgend über die Linie q hinweg geschehen. Die beiden Zweigwerthe von $R(x)$, also $R_1(x)$ und $R_2(x)$ unterscheiden sich in jedem Puncte durch das Vorzeichen. Setzen wir den Zweig

$$R_1(x)=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad R_1(0)=1$$

stetig fort, ohne die Linie q zu überschreiten, so ist dieser Zweig völlig bestimmt. Um die Werthunterschiede dieses Zweiges zu beiden Seiten der Linie q_2 kennen zu lernen, setzen wir einen Augenblick $1+x=re^{\vartheta i}$, also $R_1(x) = r^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{\vartheta i}{2}}.\sqrt{(1-x)(1-k^2x^2)}$, und betrachten die Function nur für so kleine r, dass ein mit r um den Punct -1 als Mittelpunct geschlagener Kreis dessen natürliche Begrenzung bildet, worunter hier zu verstehen ist, dass keiner der Puncte $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, 1 im Innern des Kreises enthalten ist. Für $\vartheta=0$ ist $x = -1+r$, und da dort der Zweigwerth von $R_1(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ völlig bestimmt ist, so ist auch der Zweigwerth der Function $\sqrt{(1-x).(1-k^2x^2)}$ völlig bestimmt. (Ist k reell und kleiner als 1, so hat $R_1(x)$ dort einen positiven reellen Werth.) Diese zweiwerthige Function hat im Innern der natürlichen Begrenzung des Punctes -1 keine Stelle, für welche ihre beiden Werthe zusammenfielen, und hat für alle Puncte der

Peripherie des Kreises r, insofern sie stetig fortgesetzt wird, nur einen Werth. Hingegen nimmt der Factor $r^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{2}\vartheta i}$, wenn man von $\vartheta = 0$ aus ϑ dadurch stetig ändert, dass man einmal in positiver, einmal in negativer Richtung auf der Peripherie bis zu dem Puncte $x = -1 + re^{\vartheta_1 i}$ vorgeht, in positiver Richtung den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_1 i}$, in negativer Richtung den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}(\vartheta_1 - 2\pi)i} = -r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_1 i}$ an. Damit die Linie q_2 nicht überschritten werde, darf für $x = -1 + re^{\vartheta_1 i}$ nur ein Punct gewählt werden, nämlich der, welcher auf q_2 liegt, und es folgt aus dieser Betrachtung, dass der Zweig $R_1(x)$ für die Puncte des einen Ufers von q_2 Werthe besitze, welche sich von denen für die auf dem andern Ufer gegenüberliegenden Puncte durch das Vorzeichen, mithin da, wo $R_1(x)$ nicht 0 ist, um eine endliche Grösse unterscheiden. Dies findet wegen der Stetigkeit der Function $R_1(x)$ längs der ganzen Linie q_2 statt. (Ist k reell und kleiner als 1, so ist $\vartheta_1 = \pi$ und R_1 hat auf dem Ufer, welches für die Richtung von $\frac{-1}{k}$ bis -1 das linke ist, positive rein imaginäre, auf dem andern Ufer negative imaginäre Werthe.) Setzt man $R_1(x)$ über die Linie q_2 stetig fort, so gelangt man zu den Werthen des Zweiges

$$R_2(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},\ R_2(0) = -1.$$

Setzen wir nun $R_1(x)$ stetig auf den beiden Ufern von q_2 fort, bis in die Nähe von $-\frac{1}{k}$ und setzen wiederum einen Augenblick $x = -\frac{1}{k} + re^{\vartheta i}$ und nehmen r so klein, dass ein um $-\frac{1}{k}$ als Mittelpunct mit dem Radius r geschlagener Kreis dessen natürliche Begrenzung bildet, so ist auf diesem Kreise $R_1(x) = r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$ und die beiden Werthe auf den verschiedenen Ufern von q_2, wenn dort $\vartheta = \vartheta_1$ ist, sind $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_1 i}.\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$ und $-r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_1 i}.\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$ auf den beiden Ufern von q'', wenn dort $\vartheta = \vartheta_2$ ist, hat $R_1(x)$ die Werthe $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_2 i}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x)k}$ und $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}(\vartheta_2 - 2\pi)i}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k} = r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\vartheta_2 i}\sqrt{(1-x^2)(1-kx)k}$, weil man auf das eine Ufer durch

eine positive, auf das andere durch eine negative Drehung um $1:k$ von ϑ_1 aus gelangt, und hat somit auf beiden Ufern einen und denselben Werth. Dasselbe findet wegen der Stetigkeit von $R_1(x)$ längs der ganzen Linie q'' statt. (Ist k reell und kleiner als 1, so ist $\vartheta_2 = \pi$, $\vartheta_1 = 0$, woraus folgt, dass für reelle Werthe von x, welche $< \frac{-1}{k}$ sind, $R_1(x)$ negativ reell ist.) Da sich aber über diese Line hinweg $R_1(x)$ stetig in sich selbst fortsetzt, so kann q'' ganz fortgelassen werden, ohne dass der Zweig $R_1(x)$ aufhört bestimmt zu sein. Eine ganz gleiche Betrachtung ergiebt, dass $R_1(x)$ zu beiden Seiten der Linie q_1 durch das Vorzeichen von einander verschiedene Werthe besitzt, und sich über q_1 hinweg stetig in den Zweig $R_2(x)$ fortsetzt, hingegen über die Linie q' sich stetig in sich selbst fortsetzt, so dass auch q' fortgelassen werden kann. (Für reelle $k < 1$ ist $R_1(x)$ für reelle $x < 1$ positiv reell, für reelle x zwischen 1 und $\frac{1}{k}$ auf dem positiven Ufer von q_1 negativ imaginär, für reelle $x > \frac{1}{k}$ aber negativ reell.)

Ganz dasselbe gilt nun auch für den Zweig $R_2(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, $R_2(0) = -1$, so dass jeder Zweig eine vollständig bestimmte Function der x-Ebene ist, wenn man diese durch die Linie q_1 und q_2 begrenzt, und zwar nehmen diese Functionen jede zu beiden Seiten von q_1 und q_2 um ein Endliches von einander verschiedene Werthe an. Die vier Puncte $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ sind Verzweigungspuncte der zweiwerthigen Function $R(x)$, weil für sie die Werthe $R_1(x)$ und $R_2(x)$ zusammenfallen und in jeden eine Linie einläuft, über welche hinweg ein Zweig sich unstetig ändert. Für $x = \infty$ hingegen findet keine Verzweigung statt, obgleich dort beide Zweige unendlich werden. Denn führt man die Variabele x über einen so grossen Kreis, dass er als die natürliche Begrenzung des Punctes $x = \infty$ angesehen werden kann, so nimmt jeder Zweig $R_1(x)$ und $R_2(x)$, wenn man ihn längs dieses Kreises stetig fortsetzt, überall nur einen einzigen Werth an.

Dass für das Vorhandensein eines Verzweigungspunctes an einer Stelle $x=0$ das Zusammenfallen der verschiedenen Werthe der Function allein kein ausreichendes Kriterium ist, ersieht man bei der Function $R(x)$ an der Stelle $x=\infty$, bei der Function $(x-a)\, R(x)$ aber an der Stelle $x=a$ wo beide Werthe 0 sind, während sich um den Punct $x=a$ herum nicht ein Zweig in den andern fortsetzt, weil die Factoren $x-a$ und $R(x)$ $(a \gtrless \pm 1, \pm \frac{1}{k})$ dort einändrig sind.

Jede rationale Function von x und $R(x)$ ist wie $R(x)$ verzweigt. Das heisst, ein Zweig einer solchen Function ist völlig bestimmt, wenn man die x-Ebene durch die Linien q_1 und q_2 begrenzt, und die Werthe der Function, wie sie den einzelnen Zweigen angehören sollen, für einen bestimmten Punct, etwa für $x=0$, angiebt. Denn eine rationale Function von x und $R(x)$ kann sich über Linien hinweg nur da unstetig ändern, wo dies mit $R(x)$ der Fall ist, und nimmt für jedes gegebene Werthpaar $[x, R(x)]$ nur einen einzigen Werth an. Sollten daher für bestimmte von $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ verschiedene Puncte x die beiden Werthe jener Function zusammenfallen, so kann doch in diese keine Linie einlaufen, zu deren beiden Seiten die stetige Fortsetzung der Function um ein Endliches von einander verschiedene Werthe besässe, in welcher Linie für ein einziges Werthepaar $[x, R(x)]$ zwei verschiedene Werthe vorhanden sein würden.

Umgekehrt ist auch eine wie $R(x)$ verzweigte, ausser in einzelnen Puncten, wo sie ∞ wird, stetige Function der complexen Variabeln x, d. h. eine Function, die für jedes gegebene Werthepaar $[x, R(x)]$ nur einen Werth annimmt, eine rationale Function von x und $R(x)$. Von einer solchen Function versteht es sich von selbst, dass ihre Zweige einwerthige Functionen der x-Ebene sind, wenn diese durch die Linien q_1 und q_2 begrenzt wird, weil dadurch die Zweige von $R(x)$ bestimmt sind.

Die zu untersuchende Function sei s, die Werthe, welche sie für die Werthepaare $[x, R_1(x)]$, $[x, R_2(x)]$ hat, seien bez. s_1 und s_2. Dann sind $s_1 + s_2$ und $s_1 . s_2$ einwerthige Functionen der complexen Variabeln x in der ganzen x-Ebene, weil diese Functionen in Bezug auf R_1 und R_2 symmetrisch sind. Deshalb sind sie nach Satz XXII. rationale Functionen von x, etwa $2g(x)$ und $h(x)$. Es wird aber $(s-s_1).(s-s_2) = s^2 - 2g(x)s + h(x)$ der

Null gleich, wenn s einen der beiden Werthe s_1 oder s_2 annimmt, und mithin ist s die Wurzel einer Gleichung vom zweiten Grade mit rationalen Coefficienten, oder es ist

$$s - g = \pm \sqrt{g^2(x) - h(x)},$$

also s vermindert um eine rationale Function, (welche Differenz offenbar wiederum eine wie $R(x)$ verzweigte Function sein muss, weil die rationale Function $g(x)$ für jedes Werthpaar $[x, R(x)]$ nur einen Werth annimmt), ist die Quadratwurzel einer rationalen Function. Diese kann sich aber von $R(x)$ nur durch einen rationalen Factor unterscheiden. Denn bringt man die Quadratwurzel auf die Form $p(x) . \sqrt{q(x)}$, worin $q(x)$ eine ganze Function ist, deren Linearfactoren nur einfach vorkommen, was immer möglich ist, so kann $q(x)$ keinen andern Factor als $x-1$, $x+1$, $xk-1$, $xk+1$ besitzen. Denn besässe $q(x)$ noch den Factor $x-a$, so würde in $\sqrt{x-a} . \sqrt{\frac{q(x)}{x-a}}$ der erste Factor verschiedene Werthe annehmen, wenn man x um a in positiver und negativer Richtung herum nach einem Puncte führt, wie man (nach der pag. 89 angewendeten Methode) sofort erkennt, wenn man $re^{\vartheta i}$ für $x-a$ setzt. Der zweite Factor aber bleibt ungeändert, weil in der Umgebung von a nicht zwei Werthe desselben zusammenfallen, er also dort eindrig ist. Demnach würde $s-g(x)$, also auch s, in jenem Puncte für ein einziges Werthepaar $[x, R(x)]$ — weil $R(x)$ nicht aus einem Zweig in den andern übergeht, wenn x um a geführt wird, — zwei verschiedene Werthe besitzen, was gegen die Voraussetzung ist. Es kann aber auch, wenn nicht $q(x) = \text{Const.}$ ist, keiner der Factoren $x-1$, $x+1$, $x-\frac{1}{k}$, $x+\frac{1}{k}$ fehlen. Denn fehlte z. B. der Factor $x-1$, so würde $\sqrt{q(x)}$ seinen Werth nicht ändern, wenn man x über die natürliche Begrenzung des Punctes 1 herumführte, weil innerhalb derselben nicht zwei Werthe von $\sqrt{q(x)}$ zusammenfallen. Da aber hierbei R_1 in R_2 übergegangen ist, so würde für alle Puncte einer natürlichen Begrenzung von 1 für die beiden Werthepaare (x, R_1), (x, R_2) nur ein Werth von $s-g(x)$ vorhanden sein. Da also die beiden Zweige längs einer Linie übereinstimmen, so müssten sie überhaupt übereinstimmen, also $s-g(x)$, also s eine nur einwerthige, daher rationale Function

von x sein sein und somit $\sqrt{q(x)}$ = Const. sein. Demnach ist s entweder eine rationale Function von x oder eine rationale Function von R und x, w. z. b. w.

Jetzt wollen wir die Function $R(x)$ auf eine Riemann'sche Fläche beziehen. Man denke sich zwei Ebenen über der x-Ebene übereinander ausgebreitet, und lasse dieselbe längs zweier Geraden q_1, q_2 zwischen 1 und $\frac{1}{k}$ und zwischen -1 und $-\frac{1}{k}$ so zusammenhängen, dass diese Geraden gleichsam die Thore bilden, durch welche hindurch man aus der einen Ebene nothwendig in die andere gelangt, so dass man, gleichviel ob man in der einen oder der andern Richtung über die Linie q_1 oder q_2 hinweggeht, aus dem oberen in das untere Blatt, oder aus dem unteren in das obere gelangt, ohne das System zu verlassen. Die beiden Linien q_1 und q_2 bilden also keine Begrenzung, wie es früher war, sondern sind nur der Ort, längs welches die beiden Ebenen zusammenhängen, oder längs welches sich das eine Blatt in das andere fortsetzt. Um jeden der Verzweigungspuncte 1, $1:k$, -1, $-1:k$ windet sich die Fläche zweimal, und die Verzweigungspuncte sind deshalb einfache Verzweigungspuncte. (In einem zweiblättrigen Stücke können mehrfache Verzweigungspuncte überhaupt nicht vorkommen.) Diese Riemann'sche Fläche werde mit T bezeichnet. Es ist $R(x)$ eine einwerthige (daher auch einändrige) Function der Puncte derselben, oder es repräsentirt jeder ihrer Puncte ein Werthepaar (x,R). Denn lässt man die Puncte des oberen Blattes (was nach dem pag. 88 Gesagten möglich ist) die Werthepaare (x, R_1) repräsentiren, die des untern die Werthepaare (x, R_2), so geht gerade so, wie das obere Blatt in das untere übergeht, $R_1(x)$ in $R_2(x)$ über, wenn der (x, R_1) repräsentirende Punct über eine der Linien q_1 oder q_2 hinweg bewegt wird. Demnach repräsentirt die Fläche T die Werthpaare (x, R) eindeutig, und jede wie $R(x)$ verzweigte Function ist eine einwerthige Function des Ortes in T, und jede in T einwerthige Function ist wie $R(x)$ verzweigt und demnach eine rationale Function von x und R, was aus den pag. 92 gemachten Bemerkungen leicht geschlossen wird.

Für die Behandlung eines Integrals einer rationalen Function von x und R oder einer wie R verzweigten Function reicht es

nicht hin, wenn wir die Function in ihre Zweige zerlegen, die die Zweige R_1 und R_2 repräsentirenden Ebenen durch die Linien q_1 und q_2 zu begrenzen, weil eine so begrenzte Ebene nicht einfach zusammenhängend ist, und sich daher nicht alle Integrationswege auf einander reduciren lassen. (Integrirt man z. B. über einen Kreis, der die beiden Puncte 1 und $1:k$ im Innern enthält, so ist dies Integral nicht 0, weil die ganze Begrenzung des Stückes, in dessen Innern ein Zweig von $R(x)$ den Charakter $f(x)$ hat nicht blos aus diesem Kreise, sondern auch noch aus den beiden Ufern der Linie q_1 besteht, da jeder Zweig längs dieser Linie unstetig ist.) Dies findet aber statt, wenn wir die Linien q', q'' wiederherstellen als Begrenzung der Ebene. Wir nannten q_1, q', q'', q_2 zusammen q und es bilden diese bei unserer Vorstellungsweise der Ebene als unendlich grosse Kugelfläche einen einzigen Zug. Wir wollen nun das Integral $\int_0^x \frac{dx}{R(x)} = u(x)$ einer näheren Untersuchung unterwerfen. Es besitzt die Eigenthümlichkeit für keinen Werth der oberen Grenze unendlich gross zu werden, weil nach den Zusätzen zu I^a. und zu I^b. $\frac{1}{R(x)}$ sowohl bis an die Verzweigungspuncte $x = \pm 1$, $\pm 1:k$ als auch bis $x = \infty$ integrirt werden kann und einen endlichen Werth liefert. Der Werth des Integrals $\int_0^x \frac{dx}{R(x)} = u(x)$ hängt aber sowohl von dem Wege ab, über welchen die Integration erstreckt wird, als auch von dem Zweigwerthe, welcher $R(x)$ bei der Integration ertheilt wird. Definiren wir jedoch zunächst $u(x)$ so, dass die Integration für $x=0$ mit dem Zweigwerthe $R(0) = +1$ beginne, so ist $u(x)$ für alle Werthpaare $[x, R(x)]$ vollkommen bestimmt, wenn wir niemals den Integrationsweg über die Linie q hinwegführen, weil die durch q begrenzte Ebene einfach zusammenhangend ist, und der Zweig $R_1(x)$ in ihr eine eindeutig bestimmte Function ist, und mithin der Cauchy'sche Satz (III.) anwendbar ist, und daher nach V. alle Integrationswege zwischen 0 und x einen einzigen Werth liefern.

Es sei nun $\int_0^1 \frac{dx}{R(x)}$, worin für $R(x)$ der Zweig $R_1(x)$ genommen wird, gleich K und $\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{R(x)}, = iK'$, wenn für $R(x)$ der

Zweig $R_1(x)$ genommen wird, und die Integration über das positive Ufer von q_1 erstreckt wird, d. h. über das Ufer, welches für die Richtung von $1:k$ zur Linken liegt. Dann ist das Integral über das negative Ufer derselben Linie offenbar $-iK'$, weil der Zweig $R_1(x)$, mithin jedes Element des Integrals zu beiden Seiten von q_1 nur durch das Vorzeichen verschiedene Werthe besitzt. Zu beiden Seiten der Linie q' besitzt $u(x)$ Werthe, die sich um eine Constante unterscheiden; und zwar ist $u(x)$ auf dem positiven Ufer von q' (d. h. auf dem, welches für die Richtung von $\frac{1}{k}$ nach ∞ zur Linken liegt) um die Grösse $2iK'$, welche ein Periodicitätsmodul der Function $u(x)$ heist, grösser als auf dem negativen. Denn in der That, führt man die Variabele x von 0 nach 1, dann einmal über das positive, ein andermal über das negative Ufer von q_1 nach $\frac{1}{k}$, so wächst das eine Mal $u(x)$ um iK', und nimmt das andere Mal um iK' ab, führt man dann x auf dem positiven oder negativen Ufer von q' weiter, so wächst $u(x)$ beide Male um dieselbe Grösse, nämlich um $\int_{\frac{1}{k}}^{x} \frac{dx}{R_1(x)}$, weil zu beiden Seiten von q' $R_1(x)$ nur einen einzigen Werth besitzt, und der durch die Integration über die verschiedenen Ufer von q_1 erlangte Unterschied $2iK'$ bleibt überall bestehen. Berücksichtigt man, das $R(x)$ seinen Werth nicht ändert, wenn man $-x$ statt x darin setzt, so findet man $\int_0^{-1} \frac{dx}{R(x)} = u(-1) = -K$ und

$$u\left(-\frac{1}{k}\right) = \int_0^{-\frac{1}{k}} \frac{dx}{R(x)} = -K - \int_{-1}^{-\frac{1}{k}} \frac{dx}{R(x)} = -K + iK',$$

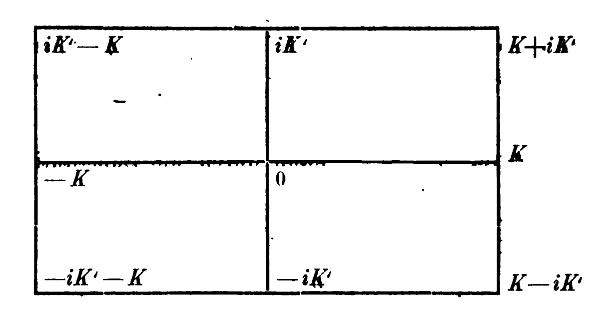
wenn die Integration über das positive Ufer von q_2, d. h. über das, welches für die Richtung von $-\frac{1}{k}$ nach -1 zur Linken liegt*), mit dem Zweigwerth $R_1(x)$ von $R(x)$ erstreckt wird; auf den negativen Ufern von q_2 aber hat $u\left(-\frac{1}{k}\right)$ den Werth

*) Die Bestimmung darüber, welches das positive und welches das negative Ufer sei, ist so getroffen dass das positive Ufer der Linie q für die Richtung 1, $1:k$, ∞, $-1:k$, -1 zur Linken liegt.

$-K-iK'$. Auf dem positiven Ufer der Linie q'' aber (d. h. auf dem, welches für die Richtung von $-\infty$ nach $-1:k$ zur Linken liegt,) ist $u(x)$ um die Grösse $2iK'$ grösser als auf dem negativen.

Das Integral $\int_{\frac{1}{k}}^{\infty}\frac{dx}{R(x)}$ kann durch die Substitution $xk = \frac{1}{x'}$, $dx = -\frac{dx'}{kx'^2}$ ausgemittelt werden. Dadurch geht es über in das Integral $-\int_1^0\frac{dx'}{-\sqrt{(1-k^2x'^2)(1-x'^2)}} = -K$, wobei es gleichgiltig ist, auf welchem Wege die Integration bis zu dem Puncte ∞ erstreckt wird. Hieraus folgt, dass $u(\infty)$ auf dem positiven Ufer der Linie q den Werth iK', auf dem negativen Ufer von q den Werth $-iK'$ besitzt.

Die Beziehung zwischen den Werthsystemen $[x, R_1(x)]$ und $u(x)$ treten noch deutlicher hervor, wenn man sich die Werthe von $u(x)$ graphisch darsfellt, indem man die Werthe der complexen Veränderlichen u in einer Ebene durch Puncte repräsentirt, wobei wir uns auf den Fall beschränken, in welchem k reell und kleiner als 1 ist, in welchem Falle die Linie q ganz auf die reelle Achse fällt. Führt man in $\int_0^x\frac{dx}{R(x)} = u(x)$ die obere Grenze x längs der reellen Achse von 0 bis 1 stetig vorwärts, so nimmt $u(x)$ die reellen Werthe zwischen 0 und K jeden einmal und nur einmal an, weil sämmtliche Integrationselemente positiv reell sind, also $u(x)$ von 0 bis 1 immer wächst. Führt man x weiter vorwärts auf dem positiven Ufer von q_1, so ist hierbei jedes Element $\frac{dx}{R(x)}$ eine rein imaginäre positive Grösse. Denn in der That ist die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse in dem Intervall von 1 bis $1:k$ negativ, also die Wurzel imaginär, und zwar negativ imaginär, weil die Bewegung der Variabeln x um den Punct 1 in negativer Richtung stattfindet, wenn x immer auf dem positiven Ufer von q bleibt, $1:R(x)$ ist folglich positiv imaginär. Demnach wächst $u(x)$ in dem Intervall von $x=1$ bis $x = 1:k$ immerfort um rein imaginäre Grössen und durchläuft alle Puncte einer der z-Achse parallelen Geraden von K bis $iK'+K$ ein- und nur einmal. Führt man nun, auf dem positiven Ufer von q bleibend, x um den Punct $1:k$, also in negativer Richtung halb herum, so wird die Function unter dem Wurzel-



zeichen in $R_1(x)$ wieder positiv (weil nun zwei Factoren, $1-x$ und $1-kx$, negativ sind,) und daher $R_1(x)$ wieder reell. Vor $1:k$ hatte $R_1(x)$ rein imaginäre negative Werthe, durch den negativen Umgang um den Punct $1:k$ erhält aber $R(x)$ wieder den Factor $-i$ und wird mithin negativ reell. Also sind in dem Intervalle von $1:k$ bis ∞ sämmtliche Elemente $\frac{dx}{R_1(x)}$ negativ reell. Die Function $u(x)$ nimmt demnach mit wachsendem x in diesem Intervalle immerfort um rein reelle Grössen bis zu dem Werthe iK' ab, und durchläuft demmach die der y-Achse parallele Gerade $iK'+K$ bis iK' ein- und nur einmal. Eine gleiche Betrachtung zeigt, dass den reellen Werthen von $x=0$ bis $x=-1$ die reellen Werthe von 0 bis $-K$ dem positiven Ufer von q_2 zwischen -1 und $-1:k$ die Puncte der Geraden $-K$, $-K+iK'$, dem positiven Ufer von q'' von $-1:k$ an bis ∞ die Puncte der Geraden $iK'-K$ bis iK' einmal und nur einmal entsprechen.

Der Begrenzung der Halbebene, in welcher der imaginäre Theil von x positiv ist, also der y-Achse, entspricht eindeutig die Begrenzung des Rechteckes K, $K+iK'$, $iK'-K$, $-K$, und zwar entsprechen den Verzweigungspuncten 1, $1:k$, $-1:k$, -1 die Ecken. Man sieht auch leicht ein, dass der positiven z-Achse der x-Ebene die imaginäre Achse der u-Ebene von 0 bis iK' eindeutig entspricht, denn in dem rein imaginären Intervall von 0 bis $i\infty$ ist $R_1(x)$ positiv reell, dx positiv imaginär, also $\frac{dx}{R_1(x)}$ positiv imaginär und demnach wächst $u(x)$ für wachsende rein imaginäre x immerfort von 0 bis iK', weil $u(\infty)=iK'$ ist, wenn man sich dem unendlich fernen Puncte auf dem positiven Ufer von q in beliebiger Richtung nähert.

Dass zu jedem Werthe von u, der durch einen Punct im Innern des Rechteckes repräsentirt wird, ein Werthepaar $[x, R_1(x)]$ gehört, das durch einen Punct der betrachteten Halbebene repräsentirt wird, folgt daraus, dass die Werthe von u durch ein Ebenenstück repräsentirt werden, welches, ausgenommen in den Ecken und in dem Puncte iK', welcher dem Puncte $x = \infty$ entspricht, nach pag. 19 und nach Satz VI. eine in den kleinsten Theilen ähnliche (conforme) Abbildung jener Halbebene ist.*)

Man kann nämlich den allgemeinen Satz aussprechen:

XXXIII. *Wird ein einfach zusammenhängendes Ebenenstück S mit der Begrenzung s auf ein Gebiet Σ durch die eindeutige Function $\omega(x)$ der complexen Veränderlichen x (oder was dasselbe ist, durch einen eindeutigen Zweig einer Function) conform ab-*

*) Durch die Substitution $\xi = \frac{x-\alpha-\beta i}{x-\alpha+\beta i}$ bildet Herr H. Schwarz („Ueber einige Abbildungsaufgaben", Crelle's Journal Bd. 70) die Hälfte der x-Ebene, in welcher der imaginäre Theil von x positiv ist, conform auf das Innere eines Kreises ab, und da diese die conforme Abbildung des Rechtecks K, $iK'+K$, $iK'-K$, $-K$ ist, so löst er hierdurch die Aufgabe, das Innere eines Rechtecks conform auf das Innere eines Kreises mit dem Radius 1 abzubilden. Der Punct $\alpha+\beta i$ entspricht dem Mittelpuncte des Kreises und ist willkürlich.

Die Beschäftigung mit der Theorie der Abbildungen scheint das geeignetste Mittel, rasch in das Wesen der complexen Functionen einzudringen, ebenso bietet sie die einfachsten Anwendungen für die Theorie der doppelt periodischen Functionen. Denn auch das Innere einer Ellipse und eines Kreises werden durch die Gleichung

$$\frac{2K}{\pi} \arcsin x = \int_0^\xi \frac{d\xi}{R(x)}$$

conform aufeinander abgebildet. Der Anfänger beschäftige sich damit, die entsprechenden Bilder durch einfache Functionen auf einander bezogener Figuren zu betrachten. So findet man z. B. (nach Herrn Schwarz), dass durch die Gleichung

$$x = \xi + \frac{1}{\xi} \text{ oder } r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos\varphi + i\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\sin\varphi$$

das Innere eines um den Nullpunct gezogenen Kreises der ξ-Ebene auf das Aeussere einer Ellipse der x-Ebene conform abgebildet wird und zwar artet die dem Einheitskreise entsprechende Ellipse in eine Gerade zwischen $x = +\sqrt{2}$ und $x = -\sqrt{2}$ aus. Kleineren Kreisen um den Nullpunct entsprechen grössere Ellipsen. Ist der Radius ϱ (< 1), so sind die Halbachsen der Ellipse $\varrho + \frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\varrho} - \varrho$. Kreis und Ellipse werden in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen.

gebildet, und ist $\omega'(x)$ im Innern von S überall von Null verschieden, und hat die Function $\omega(x)$ im Innern und am Rande von S überall den Charakter $f(x)$, so ist Σ ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Flächengebiet.

Ist die Begrenzung σ von Σ, welche nothwendig geschlossen ist, eine sich selbst nicht schneidende Curve, so bedeckt das Flächenstück Σ das ganze von σ begrenzte Ebenenstück überall einfach und nur einfach.

Unter den gemachten Voraussetzungen findet nämlich für alle Puncte im Innern von S Aehnlichkeit mit der Abbildung Σ in den kleinsten Theilen statt. Aber aus dieser Aehnlichkeit folgt, dass einem sehr kleinen Ebenenstück um einen Punct a in S, welches nach allen von a ausgehenden Richtungen ausgedehnt ist, ein nach allen Richtungen hin und einfach ausgedehntes Stück, d. h. die ω-Ebene nur einfach bedeckendes sehr kleines Gebiet entspricht. Construirt man demnach die Fläche Σ von innen heraus, so erkennt man, dass Σ im Innern, d. h. für die dem Innern von S entsprechenden Puncte weder einen Windungspunct noch eine Spaltung oder Faltung in zwei Blätter, noch eine durch eine beliebige Contour begrenzte Lücke besitzen kann, und zwar bis zu jedem beliebigen Grade der Annäherung an die Grenze. Daraus geht hervor, dass, wenn die Begrenzung σ ein einfach zusammenhängendes Ebenenstück einschliesst, dies von σ überall und nur einfach bedeckt wird.

Das negative Ufer der reellen Achse der x-Ebene wird durch die Begrenzung des Rechtecks K, $-iK'+K$, $-iK'-K$, $-K$ eindeutig in der u-Ebene abgebildet, mithin entspricht dem Innern des Rechtecks eindeutig das Innere der vom negativen Ufer der y-Achse begrenzten Halbebene, und den Verzweigungspuncten die Ecken.

Wir gehen nun zum allgemeinen Falle, in welchem k beliebig ist, zurück, und erweitern die Bedeutung des Integrales $u(x) = \int_0^x \frac{dx}{R(x)}$ dahin, dass wir dasselbe über Wege erstrecken, welche über q_1 oder q_2 hinwegführen, und $R_1(x)$ stetig längs derselben in den Zweig $R_2(x)$ fortsetzen. Denkt man sich das System der Werthepaare $[x, R_2(x)]$ ebenso wie das $[x, R_1(x)]$ durch die Puncte einer Ebene repräsentirt, welche durch Linien q_1, q', q'', q_2 begrenzt wird, so würde für alle Puncte dieser Ebene $u(x)$ bestimmt

sein, wenn der Werth für den Punct $x = 0$, $R(x) = -1$ bestimmt ist. Denn da die so begrenzte Ebene einfach zusammenhängend ist, und $1 : R(x)$ in ihr überall den Charakter $f(x)$ hat, so lässt sich jeder Integrationsweg zwischen zwei Puncten x_1 und x_2 ersetzen durch einen zwischen x_1 und 0, und einen zwischen 0 und x_2. Da ferner offenbar

$$\int_0^x \frac{dx}{R_2(x)} = -\int_0^x \frac{dx}{R_1(x)} = -u(x)$$

für alle Werthepaare (x, R_2) ist, so wird $u(x)$ auch für das erweiterte Gebiet bestimmt sein, wenn der Werth von $u(x)$ für $x = 0$, $R(x) = -1$ bestimmt wird.

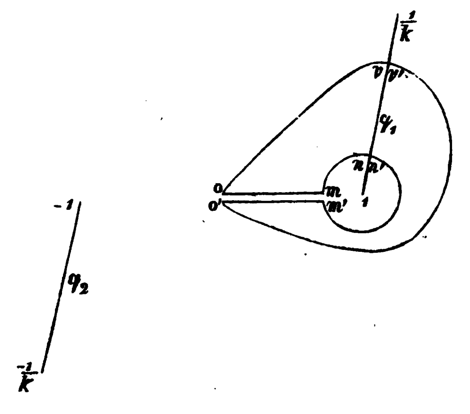
Um von dem Puncte $(x = 0, R = 1)$ zu dem Puncte $(x = 0, R = -1)$ so zu gelangen, dass $R(x)$ auf dem Wege sich immer stetig ändert, giebt es nur zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten, nämlich Wege, welche über die Linie q_1 führen, und Wege, welche über die Linie q_2 führen.

Nehmen wir als Integrationsweg den Weg $o\,m\,n\,n'\,m'\,o'$, so ist

$$\int_{o\,m\,n\,n'\,m'\,o'} \frac{dx}{R(x)} = \int_0^m \frac{dx}{R_1(x)} + \int_{m'}^0 \frac{dx}{R_2(x)} + \int_{m\,n\,n'\,m'} \frac{dx}{R(x)}$$

und wenn wir mit dem Radius des Kreises $m\,n\,n'\,m'$ zur Grenze 0 übergehen, gleich

$$\int_0^1 \frac{dx}{R_1(x)} + \int_1^0 \frac{dx}{R_2(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{R_1(x)} - \int_1^0 \frac{dx}{R_1(x)} = 2K.$$



Densellben Werth erhält man offenbar, wenn man den Kreis $m\,n\,n'\,m'$ durch einen andern in positiver Richtung um den Punct 1 führenden Kreis ersetzt, weil eben $R(x)$ nur sein Zeichen ändert, sei es, dass man die Variabele x in positiver, sei es, dass man sie in negativer Richtung um den Punct 1 herumführt.

Genau denselben Werth erhält man aber auch, wenn man als Integrationsweg den Weg $o\,\nu\,\nu'\,o'$ nimmt. Denn der Weg $o\,\nu\,\nu'\,o'$ kann durch den Weg $o\,\nu\,n\,n'\,\nu'\,o'$ ersetzt werden, weil $R_1(x)$ auf dem positiven Ufer von q_1 denselben Werth hat, als auf dem negativen Ufer $R_2(x)$ und sich somit die Integralsumme

$$\int_{\nu}^{n} \frac{dx}{R_1(x)} + \int_{n'}^{\nu'} \frac{dx}{R_2(x)}$$

vollständig aufhebt. Weiter aber kann der Weg $o\,\nu\,n$ durch $o\,m\,n$, $n'\,\nu'\,o'$ durch $o'\,m'\,o'$ nach dem Cauchy'schen Satze (Satz III.) ersetzt werden, so dass also $u(x)$ in o' auch den Werth $2K$ erhält, wenn x über den Weg $o\,\nu\,\nu'\,o'$ geführt wird.

Führt man also die Variabele x, $u(x)$ als Function der complexen Variabeln x stetig ändernd, auf beliebigem Wege von o über q_1 nach o', was ja weiter nichts heisst, als dass man den Integrationsweg von o nach o' über eine beliebige über q_1 führende Curve nehmen soll, so erhält man für $u(x)$ dort den Werth $2K$. Eine ganz gleiche Betrachtung ergiebt, dass wenn man x auf beliebigem Wege über q_2 von o nach o' führt, $u(x)$ dort den Werth $-2K$ erlangt. Demnach ist $u(x)$ für die Werthepaare $[x, R_2(x)]$ nicht vollkommen bestimmt, so lange man zu jedem, ein solches Werthepaar repräsentirenden Puncte sowohl über q_1 als über q_2 gelangen kann. Deshalb betrachten wir noch die z-Achse als Begrenzung dieser Ebene, so dass man zu allen Werthepaaren (x, R_2), welche durch Puncte auf ihrer negativen Seite repräsentirt werden, nur über q_2, zu denen, welche durch Puncte auf ihrer positiven Seite repräsentirt werden, nur über q_1 gelangen kann. Dann sind die Werthe von $u(x)$ auf dem positiven Ufer der z-Achse jener Ebene um $4K$ grösser als auf dem negativen, weil dies im 0-Puncte stattfindet, und das Integral $u(x)$, über welches Ufer der z-Achse über eine bestimmte Strecke es auch genommen werden mag, immer genau um dieselbe Grösse wächst. Die Grösse $4K$ heisst, wie $2iK'$, ein **Periodicitätsmodul** des Integrals $u(x)$.

Es ist also $u(x)$ oder genauer bezeichnet $u(x, R)$ für alle Werthepaare $[x, R(x)]$ vollkommen bestimmt, wenn man die den Zweig $R_1(x)$ repräsentirende Ebene durch die einen Zug bildenden Linien $q' q''$ begrenzt, und die den Zweig $R_2(x)$ repräsentirende Ebene durch eben solche Linien $q' q''$ und durch die z-Achse, (welche mit jenen Linien im unendlich fernen Puncte der Ebene zusammentrifft,) begrenzt. Nennen wir im zweiten System diejenigen Ufer von q', q'' die positiven, welche im ersten die negativen sind, so ist $u(x, R)$ auf den positiven Ufern von q', q'' beider Ebenen um den Periodicitätsmodul $2iK'$ grösser als auf dem negativen, und auf dem positiven Ufer der z-Achse der den Zweig R_2 repräsentirenden Ebene um $4K$ grösser als auf dem negativen, und ist sonst überall endlich und stetig.

Führt man aber die Variabele x über die Begrenzungslinien vom positiven zum negativen Ufer hinweg, $u(x, R)$ stetig fortsetzend, so erhält $u(x, R)$ Werthe, welche um $2iK'$ bez. $4K$ grösser sind, als die eben bestimmten, und wenn man den Integrationsweg, oder was dasselbe ist, die Variabele x der Function $u(x, R)$ n bez. n' mal über die begrenzende z-Achse bez. über $q' q''$ in der einen oder andern Richtung stetig führt, so erhält u den Werth

$$u(x, R) \pm 4nK \pm 2in'K'$$

und ist also eine unendliche vieldeutige Function von x und R, ähnlich wie $\lg(x)$ nur bis auf ein beliebiges ganzes Multiplum von $2\pi i$ bestimmt ist, wenn nicht die Variabilität von x, wie es pag. 76 geschehen, beschränkt wird. Betrachtet man u nur als Function von x, so wird die Vieldeutigkeit noch vermehrt, indem zu jedem x ein R_1 und ein R_2 gehört, so dass u für jedes x einen in den allgemeinen Formen enthaltenen Werth erhält:

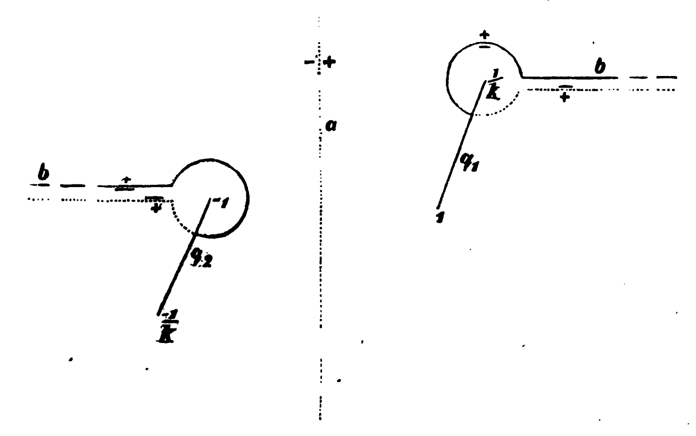
$$u \pm 4uK \pm 2n' iK', \qquad 2K - u \pm 4mK \pm 2m' iK',$$

worin n, n', m, m' beliebige ganze Zahlen sind. In den Verzweigungpuncten kann demnach u die Werthe, die die Tabelle angiebt, annehmen:

$$\begin{array}{lll} x = & 1, & -1, \\ u = & K \pm 4mK \pm 2m' iK', & -K \pm 4mK \pm 2m' iK', \\ x = & 1 : k, & -1 : k \\ u = & K \pm 4mK \pm (2m'+1)iK', & -K \pm 4mK \pm (2m'+1)iK'. \end{array}$$

Will man das Integral $u(x)$ als Function der Riemann'schen Fläche T ansehen, welche die Verzweigung von $R(x)$ dar-

stellt, so muss man diese Fläche T so begrenzen, dass sie einfach zusammenhängend wird. Zu dem Zwecke ziehen wir eine Linie b, die sowohl im oberen Blatte, als auch im unteren verläuft, und die etwa mit den früher gezogenen Linien q, q' im Allgemeinen zusammenfällt, nur nicht in die Puncte $1:k$, $-1:k$ einläuft, sondern um dieselben herum etwa eine Kreislinie beschreibend aus



(In der Figur ist die Linie b, soweit sie dem oberen Blatte angehört, durch einen continuirlichen Zug angedeutet, soweit sie dem unteren angehört, durch eine punctirte Linie. Die Linie a ist durchaus punctirt, weil sie ganz im unteren Blatte liegt. Auf die Ufer, welche als die positiven angesehen werden sollen, ist ein $+$Zeichen, auf die anderen ein $-$Zeichen gesetzt.)

einem Blatte ins andere geht. Hierzu kommt im untern Blatte die Linie a (die z-Achse). Die Linien a und b heissen die Querschnitte der Fläche T, und ihre beiden Ufer bilden zusammen eine aus einem einzigen Zuge bestehende Begrenzung, weil a und b im unendlich fernen Puncte des unteren Blattes zusammentreffen, und sie verwandeln die Fläche T in ein einfach zusammenhängendes Gebiet T'. Riemann beweist nun, dass für dieses Gebiet T' der Cauchy'sche Satz giltig bleibt, und somit das Integral einer in T einwerthigen Function über verschiedene Wege zwischen zwei Puncten [Werthepaaren (x, R)] nur einen Werth erlangt, wenn die Wege ganz in T' liegen und keinen Punct einschliessen, für welchen die Integrabilität der zu integrirenden Function aufgehoben wird. Mit der Function $1:R(x)$ ist dies für keinen Punct von T der Fall, sie hat vielmehr überall in T' den Charakter $f(x)$, und man erkennt die Einwerthigkeit des Integrales

$\int_0^{(x,R)} \frac{dx}{R(x)}$ für alle Werthepaare, welche durch Puncte in T' repräsentirt werden, leicht aus den pag. 102 gemachten Bemerkungen. Auf dem positiven Ufer des Querschnitts a ist aber offenbar dies Integral, also $u(x, R)$, um $4K$ grösser als auf dem negativen, und auf dem positiven Ufer von b um $2iK'$ grösser als auf dem negativen.

Stellt man sich die Werthe von u für die Puncte in T' in einer Ebene (der u-Ebene) graphisch dar, so wird, wenn k reell und < 1 ist, wie wir gesehen haben, das obere Blatt durch ein Rechteck abgebildet, welches durch die imaginäre Achse halbirt wird, und dessen Ecken $K - iK'$, $K + iK'$, $-K + iK'$, $-K - iK'$ sind. Gehen wir über q_1 in das untere Blatt zu den Puncten, welche auf dem positiven Ufer von a liegen, also zu Puncten, die Träger von Werthepaaren (x, R_2) sind, so hat dort $u(x, R_2)$ den Werth $2K - u(x, R_1)$ und so entsprechen diese Puncte einem Rechteck, welches dem Rechteck iK', $iK' + K$, $K - iK'$, $-iK'$ congruent, aber um die Strecke K verschoben ist, also die Ecken $iK' + K$, $iK' + 2K$, $2K - iK'$, $K - iK'$ hat. Ebenso entsprechen die Puncte der unteren Halbebene, welche auf dem negativen Ufer von a liegen, den Puncten eines Rechteeks mit den Ecken $-K + iK'$, $-2K + iK'$, $-2K - iK'$, $-K - iK'$. Also entsprechen den Puncten der Fläche T' die Puncte eines Rechtecks mit den Ecken $2K + iK'$, $-2K + iK'$, $-2K - iK'$, $2K - iK'$, und zwar dem positiven Ufer von a $(-i\infty, \ldots 0, \ldots, +i\infty)$ die Seite $2K + iK' \ldots\ 2K \ldots\ 2K - iK'$, dem negativen die gegenüberliegende um $4K$ entfernte Seite. Es enspricht der Linie

$$[(\infty, R_2) \ldots 1 : k \ldots (\infty, R_1) \ldots -1 : k \ldots (\infty, R_2)],$$

(dem positiven Ufer von b) die Seite $2K - iK' \ldots -iK' \ldots -iK' \ldots -K - iK' \ldots -2K - iK'$, den innern Puncten von T' aber die innern Puncte der Rechtecks, und zwar bilden diese Puncte zusammen ein Rechteck, welches die Ebene in seiner ganzen Ausdehnung einfach und nur einfach bedeckt, was aus Satz XXXIII. folgt, wenn man diesen auf die einzelnen Blätter der Fläche T anwendet.

Bewegt man den Punct (x, R) über einen Querschnitt hinweg, z. B. vom negativen Ufer von b auf das positive, und setzt u stetig fort zu allen Puncten von T', so erhält man offenbar im Puncte (x, R) einen Werth von u, der sich von dem früheren

um einen Periodicitätsmodul unterscheidet, im Beispiel den Werth $u(x, R) + 4K$. Führt man die Variabele x über den Querschnitt a in der einen oder der andern Richtung m mal, über b m' mal fort, $u(x, R)$ stetig fortsetzend, so erhält u offenbar für jeden Punct in T den Werth

$$u(x, R) \pm 4mK \pm 2m'iK',$$

worin unter $u(x, R)$ der Werth verstanden wird, den u im Puncte (x, R) annimmt, wenn $u = 0$ ist für $x = 0$, $R = 1$, und der Integrationsweg des Integrales $\int_0^{(x,R)} \frac{dx}{R(x)}$ nur in T' verläuft, ohne über einen Querschnitt hinweg zu führen. Die Werthe, die u annimmt, wenn (x, R) m mal über a, und m' mal über b und dann in T' zu allen Puncten geführt wird, werden in der u-Ebene durch ein Rechteck repräsentirt, dessen Ecken

$$4mK + 2m'iK' + 2K + iK, \quad 4mK + 2m'iK' - 2K - iK',$$
$$4mK + 2m'iK' - 2K - iK', \quad 4mK + 2m'iK' + 2K - iK'$$

sind. Die Fläche T, in welcher die Variabilität von (x, R) nicht durch Querschnitte beschränkt ist, wird demnach durch die ganze u-Ebene repräsentirt, weil ihre sämmtlichen Puncte in der Form

$$u \pm 4mK \pm 2m'iK'$$

enthalten sind, unter u die T' entsprechenden Werthe verstanden, da ja u die Werthe, welche durch Puncte eines Rechteckes repräsentirt werden, sämmtlich annimmt.

Im allgemeinen Falle, in welchem k beliebig ist, sind die den Querschnitten von T entsprechenden Linien der u-Ebene nicht nothwendig gerade Linien, aber es werden die Werthe von u, welche T' entsprechen, noch immer durch eine Figur repräsentirt, welche durch vier, den positiven und negativen Ufern der Querschnitte entsprechende Curven begrenzt ist, von denen je zwei parallel sind, weil u längs der ganzen Linie a auf dem positiven Ufer um die constante Grösse $4K$ grösser ist, als auf dem negativen, längs der ganzen Linie b um $2iK'$ auf dem positiven Ufer grösser als auf dem negativen. (Sollen den Querschnitten gerade Linien der u-Ebene entsprechen, so dürfen sie selbst im Allgemeinen nicht gerade Linien sein.) Aber auch in diesem Falle entspricht der Fläche T' ein (im Allgemeinen krummliniges) die u-Ebene in seiner ganzen Ausdehnung einfach und nur einfach bedeckendes Parallelogramm.

Während die Function $u(x)$, die für $k = 0$ in $\arcsin x$ übergeht*), unendlich vieldeutig ist; ist ihre Umkehrung, die mit $\sin \operatorname{am} u$ (gelesen Sinus Amplitudo u) bezeichnet wird, eine eindeutige Function, gerade so wie $\sin u$ die Umkehrung von $u = \arcsin x$ eine für alle x eindeutige Function ist.

XXXIV. *Ist $u = v + wi$ in einem Gebiete S eine Function der complexen Veränderlichen x und bedeckt das Gebiet Σ, welches die Werthe von u in S in der v, w-Ebene repräsentirt, diese in seiner ganzen Ausdehnung einfach und nur einfach, so ist x eine eindeutige Function der complexen Veränderlichen u im Gebiete Σ.*

Da jedem Werthe von u in Σ ein bestimmter Werth von x in S zugeordnet ist, so ist dem Functionenbegriffe Genüge geschehen, es ist aber auch x eine eindeutige Function von u, weil Σ die u-Ebene nur einfach bedeckt, aber zu jedem u nur ein x gehört. Da nun Σ, abgesehen von einzelnen Puncten, eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung von S ist, so ist offenbar umgekehrt auch S eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung von Σ, und mithin x eine Function der complexen Variabeln u in dem Sinne wie wir eine solche pag. 18 definirt haben.

Die durch die Querschnitte a, b begrenzte Riemann'sche Fläche T', welche die Werthe von x repräsentirt, die dem einen oder andern Blatte angehören, je nachdem diesem Werthe von x der eine oder der andere Werth von $R(x)$ zugeordnet wird, wird nun durch das Integral $u(x)$ auf ein die u-Ebene einfach bedeckendes Parallelogramm mit den Ecken $\pm(2K + iK')$, $\pm(2K - iK')$ eindeutig abgebildet. Mithin ist x im Innern dieses Parallelogramms eine eindeutige Function von u, und zwar ist für jeden Werth von u

*) Die beiden Verzweigungspuncte $1:k$ und $-1:k$ fallen dann im Unendlichen zusammen und heben sich auf, so dass die (dann einfach zusammenhängende) Fläche T nur noch für $x = \pm 1$ Verzweigungspuncte besitzt. K geht in $\frac{1}{2}\pi$ über, K' in ∞, das Periodicitätsmodul-Parallelogramm in einen der imaginären Achse parallelen unendlichen Flächenstreifen. Für $x = \infty$ wird die Function $\arcsin x$ wie ein Logarithmus unendlich und kann überhaupt durch Logarithmen ausgedrückt werden, für alle endlichen Werthe von x bleibt aber $\arcsin x$ endlich. Die umgekehrte Function $\sin u$ ist eine e i n f a c h periodische Function mit der Periode 2π, verschwindet für $x = 0$ und $x = \pi$. Alle Eigenschaften, die oben an $\sin \operatorname{am} u$ entwickelt werden, haben ihre Analoga bei der Function $\sin x$, welche der Anfänger mit Nutzen aufsuchen wird.

nicht blos der Werth von x, sondern auch der Zweigwerth $R(x)$ bestimmt, was wichtig ist. Diese Function sin am u ist nun gleich Null für $u = 0$ und $u = 2K$, weil dem Puncte $x = 0$ $R(0) = 1$ der Punct $u = 0$, dem Puncte $x = 0$ $R(0) = -1$ der Punct $u = 2K$ (oder $= -2K$) entspricht. Bemerkenswerth ist, dass $u : \sin \mathrm{am}\, u$ für $u = 0$ sich dem Werthe 1 nähert, weil

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{R(x)}, \quad \frac{d \sin \mathrm{am}\, u}{du} = \frac{dx}{du} = R(x)$$

für $x = 0$ den Werth 1 hat.

Zwei über einander liegenden Puncten der Fläche T' also einem Werth von x aber verschiedenen Zweigwerthen von $R(x)$ entsprechen verschiedene Werthe von u, nämlich u und $2K - u$ (siehe pag. 105), also ist $\sin \mathrm{am}\, u = \sin \mathrm{am}\,(2K - u)$. Ferner ist $u(-x) = -u(x)$, mithin $\sin \mathrm{am}\,(-u) = -\sin \mathrm{am}\, u$. Daraus folgt

$$\sin \mathrm{am}(u - 2K) = -\sin \mathrm{am}\,(2K - u) = -\sin \mathrm{am}\, u.$$

Man erkennt endlich mit grosser Leichtigkeit die Richtigkeit der Gleichungen $\sin \mathrm{am}\, K = 1$, $\sin \mathrm{am} - K = -1$, $\sin \mathrm{am}\,(K + iK') = 1 : k$, $\sin \mathrm{am}\, iK' = \infty$, $\sin (2K \pm iK') = \infty$.

Führt man die Veränderliche x in T über einen der Querschnitte einmal hinweg und dann wieder in T' herum, so erhält man Werthe von u, die durch ein dem vorigen congruentes Parallelogramm repräsentirt werden. Umgekehrt die Werthe dieses neuen Parallelogramms in $\sin \mathrm{am}\, u$ eingesetzt, liefern dieselben Werthe von x als die zugeordneten Puncte im ersten Parallelogramm. Bedeckt man auf diese Weise die ganze u-Ebene mit Parallelogrammen, so findet man, dass $\sin \mathrm{am}\, u$ eine doppelt periodische Function von u mit den Perioden $4K$ und $2iK'$ ist, und dass ihr also die pag. 56 bis pag. 68 entwickelten Eigenschaften zukommen. Die Summe der Werthe für welche $\sin \mathrm{am} u$ dieselben Werthe annimmt (Satz XXIIX) ist $2K$. Die Function $1 : \sin^2 \mathrm{am}\, u$ hat die Perioden $2K$, $2iK'$, und wird für $u = 0$ und also $u = 2mK + 2niK'$ zweiter Ordnung unendlich und sonst für Werthe eines Elementar-Parallelogramms nicht mehr. Da $\lim u^2 : \sin^2 \mathrm{am}\, u$ für $u = 0$ den Werth 1 hat, so unterscheidet sich $1 : \sin^2 \mathrm{am}\, u$ von der Function $p(u)$ (pag. 70) nur durch eine additive Constante. Somit ist

$$p(u) - p(iK') = \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, u},$$

weil beide Seiten gleichzeitig verschwinden.

Die Untersuchung der Functionen, welche rational in Bezug auf x und eine Quadratwurzel s einer ganzen Function vierten Grades von x sind, also in der Form

$$s = \sqrt{A.(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$$

enthalten sind, kann auf die Untersuchung der rationalen Functionen von ξ und $R(\xi)$, also solcher von der eben behandelten Form zurückgeführt werden, indem eine eindeutige Beziehung zwischen den rationalen Functionen von x und s, und denen von ξ und $R(\xi)$ hergestellt wird. Dies geschieht mittels der Relation

$$\alpha + \beta\xi + \gamma x + \delta x\xi = 0$$

oder

$$x = -\frac{\alpha+\beta\xi}{\gamma+\delta\xi}, \quad \xi = -\frac{\alpha+\gamma x}{\beta+\delta x},$$

in welcher die Constanten α, β, γ, δ so zu bestimmen sind, dass den Puncten x_1, x_2, x_3, x_4, der x-Ebene die Puncte 1, -1, $1:k$, $-1:k$ der ξ-Ebene in beliebiger Ordnung entsprechen, wobei jedoch k keine vorgegebene Grösse sein kann, sondern durch x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmt ist. Da nämlich s als Function von x in den Puncten x_1, x_2, x_3, x_4 in der $\frac{1}{2}$ten Ordnung verschwindet, und als Function von ξ in den Puncten ± 1, $\pm 1:k$ in der $\frac{1}{2}$ten Ordnung verschwinden soll, so muss offenbar, wenn ξ einen dieser vier Werthe annimmt, x einen der Werthe x_1, x_2, x_3, x_4 annehmen. Durch diese Substitution wird

$$\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)} = \frac{\text{Const.}}{(\gamma+\delta\xi)^2}\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}.$$

und

$$\int\frac{dx}{s} = \text{Const.}\int\frac{d\xi}{R(\xi)}.$$

Zur Bestimmung der Verhältnisse $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ dienen vier lineare homogene Gleichungen, deren Lösung nur dadurch möglich wird, dass die in ihnen enthaltene Constante k so bestimmt wird, dass ihre Determinante verschwindet. Diese Gleichungen erhält man aus der Gleichung $\alpha+\beta\xi+\gamma x+\delta x\xi = 0$, wenn man für x und ξ die Werthe x_1 und 1; x_2 und -1; x_3 und $1:k$; x_4 und $-1:k$ einsetzt, sie sind:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma x_1 + \delta x_1 &= 0, & \alpha - \beta + \gamma x_2 - \delta x_2 &= 0, \\ \alpha k + \beta + \gamma k x_3 + \delta x_3 &= 0, & \alpha k - \beta + \gamma k x_4 - \delta x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Verbindet man die ersten zwei durch Addition und Subtraction, und dann die letzten, so fliesst daraus das System:

$$2\alpha + \gamma(x_1 + x_2) + \delta(x_1 - x_2) = 0,$$
$$2\beta + \gamma(x_1 - x_2) + \delta(x_1 + x_2) = 0,$$
$$2\alpha k + \gamma k(x_3 + x_4) + \delta)x_3 - x_4) = 0,$$
$$2\beta + \gamma k(x_3 - x_4) + \delta(x_3 + x_4) = 0.$$

Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen kann man α, aus der zweiten und vierten β leicht eliminiren, woraus folgt:

$$\gamma k(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + \delta([x_1 - x_2]k - x_3 + x_4) = 0,$$
$$\gamma(x_1 - x_2 - kx_3 + kx_4) + \delta(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = 0.$$

Demnach findet man für das Verhältniss $\frac{\gamma}{\delta}$ die beiden Werthe:

$$\frac{(x_3 - x_4)\frac{1}{k} - (x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)}, \quad \frac{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)}{k(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)},$$

aus deren Gleichsetzung zur Bestimmung von k die quadratische Gleichung entspringt

$$k^2(x_3 - x_4)(x_1 - x_2)$$
$$+ \{[(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)]^2 - (x_1 - x_2)^2 - (x_3 - x_4)^2\} k.$$
$$+ (x_3 - x_4)(x_1 - x_2) = 0,$$

deren eine Wurzel der reciproke Werth der andern ist. Ausserdem sind noch für k verschiedene Werthe möglich, welche durch Vertauschung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 erhalten werden.

Bemerkenswerth ist, dass jedesmal der Modul k seinem absoluten Betrage nach kleiner als 1 vorausgesetzt werden kann, weil die quadratische Gleichung für k reciproke Werthe liefert. Man nennt k den Modul der elliptischen Function, weil die Grössen K und K' von ihm abhängen.

Die Beziehungen, welche zwischen den verschiedenen Moduln k bestehen, welche man erhält, wenn man die Indices der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 vertauscht, kann man am einfachsten dadurch erhalten, dass man die Wurzel $\sqrt{x - x_1 . x - x_2 . x - x_3 . x - x_4}$ durch irgend eine der möglichen lineareu Substitutionen auf die Form $\sqrt{1 - x^2 . 1 - k^2x^2}$ bringt, und auf diese (canonische) Form alle möglichen linearen Substitutionen anwendet, durch welche sie wieder dieselbe (canonische) Form erhält, in welcher nur der Modul k einen neuen Werth gewonnen hat. Man erhält auf diese Weise im Ganzen sechs verschiedene Moduln, wenn man vom Vorzeichen absieht. Die folgende Tabelle giebt in einfacher Weise an, in welcher Ordnung man die Grössen $+1$, -1, $1 : k$, $-1 : k$ für x_1, x_2, x_3, x_4 nehmen muss, damit die oben angeführte Substitu-

tion die canonische Form mit dem Modul k in eine andere canonische Form mit einem der übrigen möglichen Moduln transformirt.*)

	Modul $= (k,\ 1:k)$				$(-k,\ -1:k)$			
$x_1 =$	$1,$	$-1,$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	$-1,$	$1:k,$	$-1:k$
$x_2 =$	$-1,$	$1,$	$-1:k,$	$1:k,$	$-1,$	$+1,$	$-1:k,$	$1:k$
$x_3 =$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	$-1,$	$-1:k,$	$1:k,$	$1,$	-1
$x_4 =$	$-1:k,$	$1:k,$	$-1,$	$1,$	$1:k,$	$-1:k,$	$-1,$	$+1$

	Modul $= \left\{\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2\right\}$				$\left\{-\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, -\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2\right\}$			
$x_1 =$	$1,$	$-1,$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	$-1,$	$1:k,$	$-1:k$
$x_2 =$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	$-1,$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	-1
$x_3 =$	$-1,$	$1,$	$-1:k,$	$1:k,$	$-1:k,$	$1:k,$	$-1,$	1
$x_4 =$	$-1:k,$	$1:k,$	$-1,$	$1,$	$-1,$	$1,$	$-1:k,$	$1:k$

	Modul $= \left\{\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2, \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2\right\}$				$\left\{-\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2, -\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2\right\}$			
$x_1 =$	$1,$	$-1,$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	$-1,$	$1:k,$	$-1:k$
$x_2 =$	$-1:k,$	$1:k,$	$-1,$	$1,$	$-1:k,$	$1:k,$	$-1,$	1
$x_3 =$	$-1,$	$1,$	$-1:k,$	$1:k,$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	-1
$x_4 =$	$1:k,$	$-1:k,$	$1,$	$-1,$	$-1,$	$1,$	$-1:k,$	$1:k$

Nimmt man z. B. $x_1 = 1:k$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1:k$, $x_4 = -1$, also diejenige Combination, wie sie die dritte Vertikalreihe des zweiten Horizontalsystems giebt, so ist die quadratische Gleichung für den Modul, der mit k_1 bezeichnet werden mag,

$$k_1^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k}-1\right) + k_1\left\{\left(2+\frac{2}{k}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{k}-1\right)^2\right\}$$
$$+\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k}-1\right) = 0$$

*) Sind die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 reell, so kann man die Substitution immer so wählen, dass der Modul k reell und < 1 wird. Ist dieser Modul $> 3-2\sqrt{2} = 0{,}17152\ldots$, so kann man durch eine Substitution, welche auf den Modul $(1-\sqrt{k})^2 : (1+\sqrt{k})^2$ führt, eine canonische Form erhalten, in welcher der Modul $< 0{,}17152\ldots$ ist. Sind hingegen unter den Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 ein oder zwei Paar conjugirter, so braucht man nur in der oben angegebenen Substitution für x_1, x_2 ein Paar conjugirter zu nehmen, so erhält man ein rein imaginäres k, oder ein negativ reelles k^2. Wir werden später Substitutionen angeben, durch welche ein rein imaginäres k in ein reelles verwandelt wird, so dass in allen diesen Fällen $k < 0{,}171\ldots$ angenommen werden kann, und diese Fälle sind die in den Anwendungen meist vorkommenden.

oder

$$k_1{}^2(1-k)^2-2k_1(k^2+6k+1)+(1-k)^2=0,$$

$$k_1{}^2-2k_1\left\{\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2\right\}+1=0,$$

mithin

$$k_1=\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2.$$

Ist die vorgegebene Quadratwurzel nicht aus einem Ausdrucke vierten, sondern nur dritten Grades zu ziehen, so dass einer ihrer Verzweigungspuncte auf den unendlich fernen Punct fällt, also ist etwa

$$s=\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}\,,$$

so kann man s durch die Substitution

$$x=-\frac{\alpha+\beta\xi}{1-k\xi}$$

transformiren, und die Beziehung

$$s=\frac{\text{Const.}}{(1-k\xi)^2}R(\xi)$$

erhalten.

Setzt man in dem Integrale $\int_0^x\frac{dx}{R(x)}$ $x^2=\xi$ und $k^2=\varkappa$, so geht es in die Form über

$$u=\int_0^\xi\frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sqrt{\xi.1-\xi.1-\varkappa\xi}}$$

und es ist $\xi=\sin^2\text{am}\,u$ eine doppelt periodische Function mit den Perioden $2K$ und $2iK'$. Die Form der Wurzel $\sigma=\sqrt{\xi.1-\xi.1-\varkappa\xi}$ statt $R(x)$ unter dem Integrationszeichen gewährt so viele Vortheile, dass sie eine specielle Betrachtung wohl verdient.

Die Riemann'sche Fläche Ξ, welche die Verzweigung der Function $\sigma(\xi)$ darstellt, unterscheidet sich von der Fläche T unr durch eine Verschiebung der Verzweigungspuncte. Denn während sie in T auf $-1:k$, -1, $+1$, $1:k$ fallen, fallen sie in Ξ auf 0, 1, $1:\varkappa$, ∞. Denkt man sich in Ξ von 0 bis 1 eine sich nicht schneidende etwa gerade Linie q_1, längs welcher das obere Blatt ins untere übergeht und umgekehrt, und von $1:\varkappa$ bis ∞ eine sich nicht schneidende Linie q_2 gezogen, längs welcher die beiden Blätter der Fläche sich ebenfalls in einander fortsetzen, so ist damit die Fläche bestimmt. Es mag q_1 über der reellen Achse der ξ-Ebene liegen.

Dann können wir annehmen, das obere Blatt von Ξ repräsentire den Zweig $\sigma_1(x)$, der auf dem positiven Ufer von q_1 positiv reelle Werthe von σ liefert, wenn $\varkappa$ reell und < 1 ist. Das untere Blatt aber repräsentirt den andern Zweig.

Jede rationale Function von ξ und σ ist wie Ξ verzweigt d. h. ist eine in Ξ einwerthige Function, und jede in Ξ einwerthige Function ist eine rationale Function von σ und ξ.

Man kann diesen Satz genau so beweisen wie es für die Fläche T pag. 93 geschehen ist.

Setzen wir nun $\varkappa$ als positiv reell und <1 voraus, so ist $\sigma_1(x)$, also $\sigma(x)$ im oberen Blatte für reelle ξ zwischen 0 und 1 positiv reell, zwischen 1 und $1:\varkappa$ negativ imaginär, zwischen $1:\varkappa$ und ∞ negativ reell, zwischen ∞ und 0 auf der negativ reellen Achse positiv imaginär. Mithin durchläuft das Integral $u = \int_0^\xi \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sigma_1(\xi)}$ zwischen 0 und 1 positiv reelle Werthe von 0 bis $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sigma_1(\xi)} = \int_0^1 \frac{dx}{R_1(x)} = K.$

Das Integral $\int_1^\xi \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sigma_1(\xi)}$ durchläuft zwischen 1 und $1:\varkappa$ positiv imaginäre Werthe und durchläuft die Linie von 0 bis $\int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sqrt{\xi.1-\xi.1-\varkappa\xi}} = i\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} d\xi'}{\sqrt{\xi'.1-\xi'.1-\varkappa'\xi'}} = iK'$ einmal und nur einmal. (Hierin hängen ξ und ξ', $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch die Gleichungen

$$\varkappa + \varkappa' = 1, \ \varkappa\xi + \varkappa'\xi' = 1$$

zusammen.) Mithin durchläuft u die Werthe auf der Geraden von K bis $K + iK'$. Von $1:\varkappa$ bis ∞ durchläuft $\int_{\frac{1}{\varkappa}}^\xi \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sigma(\xi)}$ die reellen Werthe von 0 bis $-K$ (wie man durch die Substitution $\xi = x^2$ aus dem Frühern findet), also u die Gerade zwischen $K + iK'$ und iK'. Zwischen 0 und ∞ auf der negativen Achse durchläuft u die rein imaginären Werthe von 0 bis iK'. Den Werthen von ξ mit positiv imaginärem Theil entsprechen die Werthe im Innern des Rechteckes $0, iK', K+iK', K$, und mithin wird die Halbebene, welche diese Werthe enthält, durch die Gleichung

$$u = \int_1^\xi \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sigma_1(\xi)}$$

auf das Innere jenes Rechteckes, abgesehen von den Ecken, conform abgebildet.*)

Damit das Integral $\int_1^\xi \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sigma_1(\xi)}$ völlig bestimmt sei, müssen wir die σ_1 entsprechende durch q_1 und q_2 begrenzte Ebene noch durch eine q_1 und q_2 verbindende Linie weiter begrenzen, weil sie nicht einfach zusammenhängend ist. Wir wählen hierzu eine Linie q', welche von 1 bis $1:\varkappa$ mit der reellen Achse der ξ-Ebene zusammenfällt. Dann bildet sich das negative Ufer von q_1, q', q_2 auf das Rechteck mit den Ecken 0, $-K$, $-K+iK'$, iK' ab, und die ganze Halbebene, in welcher die Werthe von ξ einen negativ imaginären Theil haben, bildet sich auf das Innere dieses Rechteckes ab. Führt man sodann ξ um den Punct 0 herum, also über die Linie q_1 hinweg ins zweite Blatt, welches dem Zweige $\sigma_2(\xi)$ entspricht, und dann ξ in diesem ganzen Blatte herum, aber niemals über die auch in diesem Blatte $1:\varkappa$ und 1 verbindende Linie q' hinweg, so bildet sich dies zweite Blatt auf ein Rechteck mit den Ecken $-K$, $-K-iK'$, $+K-iK'$, $+K$, welches die u-Ebene einfach bedeckt, ab, also die ganze Fläche Ξ, wenn sie durch q' und q_2 begrenzt gedacht wird, auf ein Rechteck mit den Ecken $K+iK'$, $-K+iK'$, $-K-iK'$, $K-iK'$. Welchen Integrationsweg man nun auch wählen mag, wenn nur die Linien q_2 und q' (in beiden Blättern) nicht überschritten werden, so erlangt das Integral $\int_0^\xi \frac{\frac{1}{2} d\xi}{\sigma(\xi)}$ immer einen und denselben Werth. (Die ganze so begrenzte Fläche Ξ ist einfach zusammenhängend und werde mit Ξ' bezeichnet.) Führt man aber ξ über eine der Linien q' oder q_2 hinweg, so gelangt man zu Werthen des Integrals, die von den frühern Werthen in denselben Puncten um $\pm 2K$, oder $\pm 2iK'$ verschieden sind, wobei das Vorzeichen von der Richtung abhängt, in welcher diese Linien überschritten werden. (Die Linien q' und q_2 in Ξ entsprechen den Querschnitten a und b in T.) Durch öfteres Ueberschreiten dieser Linien kann man zu allen möglichen Werthen gelangen, aber zu dem Werthe ∞ nur dadurch, dass man eine der Linien q', q_1 unendlich oft in derselben Richtung

*) Für $\varkappa = \frac{1}{2}$ ist auch $\varkappa' = \frac{1}{2}$, also $K = K'$ und das Rechteck ein Quadrat.

überschreitet. Weil aber Ξ' (wie früher T') auf ein endliches Stück der u-Ebene abgebildet wird, so nennt man u ein überall endliches Integral, oder ein Integral erster Gattung.

Ein Integral zweiter Gattung, d. h. ein Integral, welches in einem Puncte wie eine algebraische Function, mithin in einer ganzen oder gebrochenen Ordnung, also nicht logarithmisch unendlich wird, und in Ξ' eindeutig ist, erhält man am einfachsten durch Differentiation nach dem Modul $\varkappa$. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial \varkappa} = \int_0^\xi \frac{\frac{1}{2}\xi d\xi}{(1-\varkappa\xi)\,\sigma(\xi)}$$

eine in Ξ' einwerthige Function, die im Puncte $1:\varkappa$ wie $(1-\varkappa\xi)^{-\frac{1}{2}}$ unendlich wird, sonst aber endlich bleibt. Zu beiden Seiten der Linie q' sind die Werthe derselben um die Grösse

$$\frac{2\partial K}{\partial \varkappa} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\xi\, d\xi}{(1-\varkappa\xi)\sigma(\xi)}$$

zu beiden Seiten von q_2 um die Grösse

$$2i\frac{\partial K'}{\partial \varkappa} = -i\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\xi' d\xi'}{(1-\varkappa'\xi')\sigma(\xi')}$$

von einander verschieden.

Die Function $\frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2}$ ist ebenfalls eine in Ξ' einwerthige Function, die für $\xi = 1:\varkappa$ wie $(1-\varkappa\xi)^{-\frac{3}{2}}$ unendlich wird, sonst aber endlich bleibt, und an q' den Periodicitätsmodul $2\frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2}$, an q_2 den $2i\frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2}$ besitzt.

Setzt man

$$\varDelta(\xi) = \begin{vmatrix} u, & \frac{\partial u}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2} \\ K, & \frac{\partial K}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \\ K', & \frac{\partial K'}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2} \end{vmatrix},$$

so ist $\varDelta(\xi)$ eine in Ξ einwerthige Function. Denn für die Werthe von u, die sich um Multipla der Periodicitätsmoduln $2K$, $2iK'$ unterscheiden, erhält man eine Determinante, die von der ursprünglichen nur dadurch verschieden ist, dass die Terme der ersten Horizontalreihe um gleiche Vielfache der entsprechenden Terme

der zweiten Horizontalreihe, oder der dritten Horizontalreihe oder beider vermehrt erscheinen, wodurch die Determinante selbst ihren Werth nicht ändert. Diese Function $\varDelta(\xi)$ ist mithin eine rationale Function von ξ und σ, die im Puncte $1:\varkappa$ wie $(1-\varkappa\xi)^{-\frac{3}{2}}$ unendlich wird, sonst aber endlich bleibt. Für $\xi=0$ verschwindet $\varDelta(\xi)$, weil die erste Horizontalreihe verschwindet. Für $\xi=1$ verschwindet $\varDelta(\xi)$ ebenfalls, weil da die beiden ersten Horizontalreihen einander gleich werden. Es kann deshalb $\varDelta(\xi) = \sigma(\xi).(\alpha+\beta\xi):(1-\varkappa\xi)^2$ gesetzt werden. Hierin muss aber $\beta=0$ sein, weil $\varDelta(\xi)$ für $\xi=\infty$ auch noch verschwindet, denn dort werden die erste und dritte Reihe einander gleich. Also hat man

$$\varDelta(\xi)=\alpha\frac{\sigma}{(1-\varkappa\xi)^2}.$$

Nun werde

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial K}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2} \\ \frac{\partial K'}{\partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2} \end{vmatrix} = \alpha A, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2}, & K \\ \frac{\partial^2 K'}{\partial \varkappa^2}, & K' \end{vmatrix} = \alpha B,$$

$$K\frac{\partial K'}{\partial \varkappa} - K'\frac{\partial K}{\partial \varkappa} = \alpha C$$

gesetzt, so ist $\varDelta(\xi):\alpha =$

$$uA+\frac{\partial u}{\partial \varkappa}B+\frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2}C = \frac{\sigma}{(1-\varkappa\xi)^2} = \sqrt{\frac{\xi.1-\xi}{(1-\varkappa\xi)^3}}$$

und wenn man diese Gleichung nach ξ differenzirt,

$$\frac{A}{\sigma}+\frac{\frac{1}{2}\xi B}{(1-\varkappa\xi)\sigma}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\xi^2 C}{(1-\varkappa\xi)^2\sigma} = \frac{(1-\varkappa\xi)(1-2\xi)+3\varkappa\xi\,(1-\xi)}{2\,\sigma(\xi)\,(1-\varkappa\xi)^2}$$

oder

$$(1-\varkappa\xi)^2 A+\tfrac{1}{2}\xi\,(1-\varkappa\xi)B+\tfrac{3}{4}\xi^2 C = \tfrac{1}{2}\left[1+\xi\,(2\varkappa-2)-\xi^2\varkappa\right].$$

Für $\xi=0$ folgt hieraus $A=\frac{1}{2}$, für $\xi=1:\varkappa$ folgt $\frac{3C}{2\varkappa^2} = 3-\frac{3}{\varkappa}$, $C=2\varkappa(\varkappa-1)$ und vergleicht man die Coefficienten von ξ^2, so folgt $\varkappa^2 A-\frac{1}{2}\varkappa B+\frac{3}{4}C=-\frac{1}{2}\varkappa$, $B=\varkappa+3(\varkappa-1)+1 = 2(2\varkappa-1)$. Hieraus entspringt für u die Differentialgleichung:

$$\varkappa.\varkappa-1.\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varkappa^2}+(2\varkappa-1)\frac{\partial u}{\partial \varkappa}+\tfrac{1}{4}u = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi.1-\xi}{(1-\varkappa\xi)^3}},$$

und für $\xi=1$ oder $\xi=\infty$ wird die rechte Seite 0 und u geht in K oder iK' über. Demnach sind K und K' particuläre Lösungen der Differentialgleichnng zweiter Ordnung,

$$4\varkappa\,.\,\varkappa-1\,.\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\varkappa^2}+4(2\varkappa-1)\,\frac{\partial\omega}{\partial\varkappa}+\omega=0\,^{*})$$

oder wenn $\varkappa = k^2$ gesetzt wird.

$$k\,.\,1-k^2\,.\,\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}+(1-3k^2)\frac{\partial\omega}{\partial u}-k\omega=0.$$

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen (siehe Baltzer Determinanten § 10, 2) folgt

$$\begin{vmatrix} K, & \frac{\partial K}{\partial\varkappa} \\ K', & \frac{\partial K'}{\partial\varkappa} \end{vmatrix} = \text{Const.}\, e^{-\int\frac{2\varkappa-1}{\varkappa.\varkappa-1}} =$$

$$\text{Const.}\, e^{-\int\frac{d\varkappa}{\varkappa}-\int\frac{d\varkappa}{\varkappa-1}} = \frac{\text{Const.}}{\varkappa.\varkappa-1},$$

und setzt man $\varkappa = \frac{1}{2}$, so findet man**) Const. $= \frac{1}{4}\pi$, so dass

$$K\frac{\partial K'}{\partial\varkappa}-K'\frac{\partial K}{\partial\varkappa}=\frac{\pi}{4\varkappa.\varkappa-1}=\frac{-\pi}{4\varkappa\varkappa'}$$

*) Hieraus, oder noch leichter aus den bestimmten Integralen für K und K' findet man in der Gaussischen Bezeichnung ($k'^2 = 1-k^2$ gesetzt) $2K = \pi F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2)$, $2K' = \pi F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k'^2)$.

**) Die Auswerthung dieser Constanten in der angegebenen Weise ist etwas complicirt, sie ergiebt sich ebenso wie die Relation selber aus der Betrachtung der ϑ-Functionen später von selbst.

Setzt man $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1-\varkappa\xi}}{\sqrt{\xi.1-\xi}}\,d\xi = E$, $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1-\varkappa'\xi}}{\sqrt{\xi.1-\xi}}\,d\xi = E'$,

und integrirt die Gleichung

$$\frac{d\,\frac{\xi.1-\xi}{\sigma}}{d\xi}=\frac{1-2\xi+\varkappa\xi^2}{2(1-\varkappa\xi)\sigma}=\frac{-\varkappa'}{2\varkappa\sigma}+\frac{1-\varkappa\xi}{2\varkappa\sigma}-\frac{\varkappa'\xi}{2.1-\varkappa\xi.\sigma},$$

so folgt

$$\frac{\xi.1-\xi}{\sigma}=-\frac{\varkappa'}{\varkappa}\int_0^\xi\frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sigma}+\frac{1}{\varkappa}\int_0^\xi\frac{\frac{1}{2}(1-\varkappa\xi)d\xi}{\sigma}-2\varkappa'\int_0^\xi\frac{\frac{1}{4}\xi d\xi}{1-\varkappa\xi.\sigma},$$

und für $\xi = 1$

$$0=-\frac{\varkappa' K}{\varkappa}+\frac{1}{\varkappa}E-2\varkappa'\frac{\partial K}{\partial\varkappa}$$

und in ähnlicher Weise

$$0=-\frac{\varkappa K'}{\varkappa'}+\frac{1}{\varkappa'}E'+2\varkappa\frac{\partial K'}{\partial\varkappa}.$$

Führt man diese Werthe für $\frac{\partial K}{\partial\varkappa}$ und $\frac{\partial K'}{\partial\varkappa}$ in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich die Legendre'sche Relation $KE'+K'E-KK' = \frac{1}{2}\pi$.

ist, oder $$K\frac{\partial K'}{\partial k} - K'\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{-\pi}{2kk'^2}.$$

Sowie jede Quadratwurzel $\sqrt{x-x_1\,.\,x-x_2\,.\,x-x_3\,.\,x-x_4}$ auf die Form $R(x)$ durch eine lineare Substitution gebracht werden konnte, so kann sie auch auf die Form $\sigma(\xi)$ durch eine solche Substitution zurückgeführt werden. Hierzu hat man in der Substitutionsformel

$$\alpha + \beta\xi + \gamma x + \delta x\xi = 0$$

die Constanten α, β, γ, δ nur so einzurichten, dass für $\xi = 0$ $x = x_1$, für $\xi = 1$ $x = x_2$, für $\xi = 1:\varkappa$ $x = x_3$, für $\xi = \infty$ $x = x_4$ ist.

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\alpha + \gamma x_1 = 0,\quad \alpha + \beta + \gamma x_2 + \delta x_2 = 0,$$
$$\alpha\varkappa + \beta + \gamma\varkappa x_3 + \delta x_3 = 0,\quad \beta + \delta x_4 = 0,$$

woraus folgt

$$\gamma(x_2 - x_1) + \delta(x_2 - x_4) = 0,\quad \gamma\varkappa(x_3 - x_1) + \delta(x_3 - x_4) = 0,$$
$$\varkappa = \frac{(x_3 - x_4)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_4)}.$$

Vertauscht man x_2 mit x_3, so erhält man den reciproken Werth. Vertauscht man x_1 mit x_2 und x_3 mit x_4, oder vertauscht man x_1 mit x_4, und x_2 mit x_3 oder x_1 mit x_3 und x_2 mit x_4, so erhält man dasselbe $\varkappa$, so dass im Ganzen sechs verschiedene $\varkappa$ möglich sind. Um die Beziehungen zwichen den verschiedenen Moduln $\varkappa$ kennen zu lernen, die man erhält, wenn man die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 auf alle mögliche Weise vertauscht, ist es am einfachsten, die vorgegebene Irrationalität auf eine Weise in die Form $\sqrt{x\,.\,1-x\,.\,1-\varkappa x}$ gebracht zu denken, und diese auf eine Irrationalität derselben Form zu transformiren. Dann sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Grössen 0, 1, $1:\varkappa$, ∞ in irgend einer Combination.

Die nachfolgende Tabelle, welche ganz ähnlich construirt ist, wie die pag. 111 verzeichnete, giebt an, welche der Werthe 0, 1, $1:\varkappa$, ∞ mau für x_1, x_2, x_3, x_4 wählen muss, um zu einer Quadratwurzel mit dem darüber stehenden Modul zu gelangen.*).

*) Hat $\varkappa$ einen negativ reellen (also k einen rein imaginären) Werth, so hat $1:\varkappa'$ einen positiven reellen Werth <1, confer. die Anmerk. auf Seite 111.

Modul =	$\varkappa$				$1:\varkappa$			
$x_1 =$	0,	1,	$1:\varkappa$,	∞	1,	∞,	0,	$1:\varkappa$
$x_2 =$	1,	0,	∞,	$1:\varkappa$	∞,	1,	$1:\varkappa$,	0
$x_3 =$	$1:\varkappa$,	∞,	0,	1	0,	$1:\varkappa$,	1,	∞
$x_4 =$	∞,	$1:\varkappa$,	1,	0	$1:\varkappa$,	0,	∞,	1

Modul =	$\varkappa'$				$1:\varkappa'$			
$x_1 =$	0,	∞,	$1:\varkappa$,	1	0,	$1:\varkappa$,	∞,	1
$x_2 =$	∞,	0,	1,	$1:\varkappa$	$1:\varkappa$,	0,	1,	∞
$x_3 =$	$1:\varkappa$,	1,	0,	∞	∞,	1,	0,	$1:\varkappa$
$x_4 =$	1,	$1:\varkappa$,	∞,	0	1,	∞,	$1:\varkappa$,	0

Modul =	$-\varkappa:\varkappa'$				$-\varkappa':\varkappa$			
$x_1 =$	0,	1,	∞,	$1:\varkappa$	0,	∞,	1,	$1:\varkappa$
$x_2 =$	1,	0,	$1:\varkappa$,	∞	∞,	0,	$1:\varkappa$,	1
$x_3 =$	∞,	$1:\varkappa$,	0,	1	1,	$1:\varkappa$,	0,	∞
$x_4 =$	$1:\varkappa$,	∞,	1,	0	$1:\varkappa$,	1,	∞,	0

Nachträge und Bemerkungen.

Wenn eine Function $\omega(y, z)$ im Innern eines Gebietes S für jedes specielle x und y einen Differentialquotienten $\frac{\partial\omega}{\partial y} = u$, $\frac{\partial\omega}{\partial z} = v$ besitzt, so folgt daraus, wie pag. 17 bemerkt wurde, noch nicht, dass

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz$$

sei, d. h. dass $\lim\omega(y+\delta\sin\varphi,\ z+\delta\cos\varphi):\delta = u\sin\varphi + v\cos\varphi$ sei, oder dass ω in jeder Richtung φ einen Differentialquotienten (so wollen wir den eben gebildeten Grenzwerth nennen) besitze. Dies ist aber für das Innere von S wirklich der Fall, wenn u und v stetige Functionen von y und z sind, wobei dieser Begriff natürlich in der Ausdehnung zu nehmen ist, wie er pag. 14 und 15 gegeben ist.

Beim Beweise dieses Satzes ist es wesentlich, dass u nicht blos gleich $\lim[\omega(y+\delta, z)-\omega(y, z)]:\delta$, sondern auch gleich $\lim[\omega(y-\delta, z)-\omega(y, z)]:-\delta$ für positive abnehmende δ ist, und dass sich v in Bezug auf z ebenso verhalte. Denn nur in diesem Falle kann man bedingungslos (vgl. die Anm. auf pag. 11)

$$\omega(y+h, z) = \omega(y, z) + hu(y, z) + h[u(y+\zeta h, z)-u(y,z)],$$
$$\omega(y, z+k) = \omega(y, z) + kv(y, z) + k[v(y, z+\zeta' k)-v(y, z)]$$

schreiben, wenn ζ und ζ' zwischen 0 und 1 liegen.

Nun sei $h = \delta \sin\varphi$, $k = \delta\cos\varphi$. Es ist aber

$$\begin{aligned}&\omega(y+h, z+k)-\omega(y, z)\\ &= \omega(y+h, z+k)-\omega(y, z+k) + \omega(y, z+k)-\omega(y, z)\\ &= u(y, z+k)h + v(y, z)k + [u(y+\zeta h, z+k)-u(y, z)]h\\ &\quad -[u(y, z+k)-u(y, z)]h + [v(y, z+\zeta' k)-v(y, z)]k.\end{aligned}$$

Ist nun σ eine beliebig klein vorgegebene Grösse, so können wir δ (mithin h und k) für alle y und z so klein annehmen, dass

$$\begin{aligned}u(y, z+k) &= u(y, z) + \tfrac{1}{10}\varepsilon\sigma,\\ u(y+\zeta h, z+k)-u(y, z) &= \tfrac{1}{10}\varepsilon'\sigma,\\ u(y, z+k)-u(y, z) &= -\tfrac{1}{10}\varepsilon''\sigma,\\ v(y, z+\zeta' k)-v(y, z) &= \tfrac{1}{10}\varepsilon'''\sigma\end{aligned}$$

werde, worin ε, ε', ε'', ε''' unbekannte zwischen -1 und $+1$ liegende Zahlen sind, und zwar kann gleichmässig für alle φ ein einziges δ gefunden werden (siehe pag. 14). Hieraus folgt

$$\frac{\omega(y+h, z+k)-\omega(y, z)}{\delta} =$$
$$u.\sin\varphi + v.\cos\varphi + \tfrac{1}{10}\sigma(\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''),$$

und da σ beliebig klein ist, so können wir zur Grenze übergehen, und erhalten so die zu beweisende Gleichung:

$$\lim_{\delta=0}\frac{\omega(y+\delta\sin\varphi + z + \delta\cos\varphi)-\omega(y, z)}{\delta} = u\sin\varphi + v\cos\varphi.$$

Wenn demnach die Stetigkeit von $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial\omega}{\partial z}$ vorausgesetzt wird, wie dies für die Functionen vom Charakter $f(x)$ pag. 24 ausser in einzelnen Punkten und Linien geschieht, so fällt die pag. 19 für $\varphi(\xi)$ ausgesprochene Beschränkung fort; macht man

diese Voraussetzung nicht, sondern nur die der Integrabilität von $\frac{\partial \omega}{\partial y} dy\, dz$, $\frac{\partial \omega}{\partial z} dy\, dz$ für das Gebiet S, so muss die Beschränkung beibehalten werden. (Vergl. die Anmerk. pag. 31.)

Die Function x^λ hat an der Stelle $x = 0$ und $x = \infty$ Verzweigungspuncte und sonst nirgend. Wir nehmen die positive reelle Achse von 0 bis ∞ als Querschnitt q und nennen den Zweig von x^λ, der für $x = 1$ auf dem positiven Ufer von q (d. h. demjenigen, welches für die Richtung von 0 nach ∞ zur Linken liegt) den Werth 1 hat, den Hauptzweig. Auf dem rechten Ufer von q hat der Hauptzweig von x^λ den Werth $e^{2\lambda\pi i}.x^\lambda$, wenn x^λ wieder den Werth auf dem linken Ufer bedeutet.

Die Function $(1-x)^{-\lambda}$ hat ihre Verzweigungspuncte an der Stelle $x = 1$ und $x = \infty$ und dieselbe Linie q als für x^λ kann zur Festsetzung ihrer Zweige dienen. Der Hauptzweig habe für $x = 0$ den Werth 1. Auf dem negativen Ufer von q von 1 ab bis ∞ ist er $e^{-2\lambda i\pi}$ mal so gross als auf dem positiven Ufer. Die Werthe auf beiden Ufern zwischen 0 und 1 sind einander gleich. Die Function $x^\lambda(1-x)^{-\lambda}$ kann durch dieselbe Linie q in Zweige zerlegt werden, und der Hauptzweig derselben ist völlig definirt, wenn wir ihn das Produkt der beiden Hauptzweige von x^λ und $(1-x)^{-\lambda}$ sein lassen. Auf dem positiven Ufer von 0 bis 1 ist dieser Zweig $e^{2\lambda\pi i}.x^\lambda.(1-x)^{-\lambda}$, wenn er auf dem positiven Ufer $x^\lambda(1-x)^{-\lambda}$ ist, von 1 bis ∞ aber sind die Werthe auf beiden Ufern einander gleich, und es kann q von 0 bis ∞ ganz fortgelassen werden. Der Punct ∞ ist für $x^\lambda(1-x)^{-\lambda}$ kein Verzweigungspunct, denn durchläuft x eine geschlossene Curve, die den Punct 0 und 1 im Innern enthält, also als natürliche Begrenzung des Punctes ∞ angesehen werden kann, vollständig, so erhält $x^\lambda(1-x)^{-\lambda}$ zuletzt den Werth wieder, den es am Anfange hatte.

Das Integral $\int x^\lambda(1-x)^{-\lambda} \frac{dx}{x}$ über eine solche eben beschriebene Curve erstreckt, ist nach dem Cauchy'schen Satze (III.) gleich dem über die beiden Ufer von q erstreckten Integral, weil diese Ufer und die Contour zusammen ein Stück begrenzen, in dessen Innerm $x^{\lambda-1}.(1-x)^{-\lambda}$ den Charakter $f(x)$ hat. Dabei

muss jedoch der reelle Theil von $\lambda < 1$ und > 0 sein, weil sonst das Integral keinen Sinn hat. Die Contour sei ein Kreis (um 0) c. Dann ist das Integral

$$\int_c x^{\lambda-1}(1-x)^{-\lambda}dx = \int_{q+} x^{\lambda-1}(1-x)^{-\lambda}dx - \int_{q-} x^{\lambda-1}(1-x)^{-\lambda}dx,$$

wenn über c in der Richtung von links nach rechts integrirt wird, und q^+ das positive Ufer von q in der Richtung von 0 nach 1, und q^- das negative Ufer von 0 nach 1 bedeutet. Da aber dx auf beiden Ufern von q dasselbe ist, so ist

$$\int_{q-} x^{\lambda-1}(1-x)^{-\lambda}\,dx = e^{2\lambda\pi i}\int_{q+} x^{\lambda-1}(1-x)^{-\lambda}\,dx,$$

und also

$$\int_c x^{\lambda-1}(1-x)^{-\lambda}\,dx = (1-e^{2\lambda\pi i})\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{-\lambda}\,dx$$
$$= -2ie^{\lambda\pi i}\sin\lambda\pi\;\Pi(\lambda-1).\Pi(-\lambda).$$

Durch die Substitution $x = 1:x'$, $dx = -dx':x'^2$ bildet sich der sehr grosse Kreis c auf einem sehr kleinen Kreise c' um den Punct 0 der x'-Ebene ab, und wird von rechts nach links durchlaufen, wenn c von links nach rechts durchlaufen wird. Mithin ist

$$\int_c x^{\lambda-1}.(1-x)^{-\lambda}\,dx = -\int_{c'}\frac{(x'-1)^{-\lambda}}{x'}dx' = -2\pi i\, e^{\lambda\pi i}$$

nach Satz VIII. Daraus folgt, so lange $0 < \lambda < 1$ ist,

$$\frac{\pi}{\Pi(-\lambda)\,\Pi(\lambda-1)} = \sin\lambda\pi.$$

Setzt man für $\Pi(\mu)$ statt des Integrales das unbedingt convergente unendliche Produkt

$$\Pi(\mu) = e^{-\mu M}.\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{e^{\frac{\mu}{n}}}{1+\frac{\mu}{n}}\right),\quad (M = 0{,}57721566\ldots)$$

so lassen sich beide Seiten als Function der complexen Variabeln λ in der ganzen Ebene eindeutig fortsetzen, und da dies nur auf eine Weise geschehen kann, so gilt diese Formel allgemein. Dies ist ein Beispiel der pag. 45 besprochenen Anwendung des Satzes XVI.

Ist die Gleichung einer Lemniscate in Polarcoordinaten

$$r = a\sqrt{\cos 2\vartheta},$$

so ist ein Bogenelement

$$ds = \frac{a\,d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = \frac{a\,d\vartheta}{\sqrt{1-2\sin^2\vartheta}}.$$

Setzt man $\sin\vartheta = \sqrt{\xi} = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin^2\vartheta = \tfrac{1}{2}(1+\xi') = \tfrac{1}{2}(1+x'^2)$,

so ergiebt sich

$$ds = \frac{a\,d\xi}{2\sqrt{\xi\,.\,1-\xi\,.\,1-2\xi}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{2}\,.\sqrt{1-x^2\,.\,1-\tfrac{1}{2}x^2}}$$

$$= \frac{a\,\tfrac{1}{2}d\xi'}{i\sqrt{2}\sqrt{\xi'\,.\,1-\xi'^2}} = \frac{a\,dx'}{i\sqrt{2}\sqrt{1-x'^4}}.$$

Die Integrale dieser Ausdrücke sind die einfachsten elliptischen Integrale. Die ganzen Integrale, so nennt man K, K', E, E' *), können durch Gaussische Π-Functionen, die Integrale erster und zweiter Gattung durch die hypergeometrische Reihe ausgedrückt werden. Es ist

$$K(i) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}.(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\Pi(-\tfrac{3}{4})\,\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(-\tfrac{1}{4})} = \sqrt{\pi}\,.\frac{\Pi(\tfrac{1}{4})}{\Pi(-\tfrac{1}{4})} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\Pi^2(\tfrac{1}{4});$$

$$iK'(i) = \int_1^i \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_0^i \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= -K(i) + i\,K(i), \quad K'(i) = (1+i)K(i).$$

$$E(i) = \int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,.\,dx = \tfrac{1}{4}\int_0^1 z^{-\frac{3}{4}}(1-z)^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \frac{\Pi(\tfrac{1}{4})\,.\,\Pi(\tfrac{1}{2})}{\Pi(\tfrac{3}{4})} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\,\Pi^2(\tfrac{1}{4}),$$

$$E'(i) = \int_0^1 \sqrt{1-x'^2\,.\,1-2x'^2}\,dx' = \tfrac{1}{2}\int_i^1 \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_i^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{1}{2}\int_i^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Ferner ergiebt die Substitution $x = x\,t^{\frac{1}{4}}$, $dx = \tfrac{1}{4}x\,t^{-\frac{3}{4}}\,dt$:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \tfrac{1}{4}x\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}.(1-t\,x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt = x\,F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{4}, x^4),$$

$$\int_0^x \sqrt{1-x^4}\,dx = \tfrac{1}{4}x\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-x^4\,t)^{\frac{1}{2}}\,dt = xF(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{4}, x^4).$$

---

*) Wegen der Bezeichnung siehe die Anmerk. pag. 117, Anmerk.

Macht man die Substitution $\xi = (1+i)\frac{1-x}{1-ix}$, so folgt

$$\frac{\frac{1}{2}d\xi}{\sqrt{\xi.1-\xi.1-\frac{1}{2}\xi}} = \frac{\sqrt{2}}{1-i}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{i}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Alle elliptischen Integrale sind durch Legendre auf drei wesentlich verschiedene Gattungen zurückgeführt worden, deren canonische Formen goniometrische Functionen enthalten. Da es nöthig ist, seine Bezeichnungen zu kennen, so lassen wir sie hier folgen. Er setzte $x = \sin\varphi$ und erhielt

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2.1-k^2x^2}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi, k).$$

Als die kanonische Form des elliptischen Integrales zweiter Gattung wählte er die

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\varphi, k),$$

welches Integral eine einfache geometrische Bedeutung hat. Zieht man über der grossen Achse ($2A$) einer Ellipse, welche die Excentricität k hat, als Durchmesser einen Kreis, und zieht man einen Radius in diesem Kreise, der mit der kleinen Achse den Winkel φ macht, und fällt vom Endpuncte desselben ein Loth auf die grosse Achse, so schneidet dieses Loth von der Ellipse einen Bogen ab, der von dem Endpuncte der kleinen Achse an gerechnet, die Grösse $A\,.\,E(\varphi, k)$ hat. Hiervon rührt der Name „elliptische Integrale" her.

In der Legendre'schen Bezeichnung ist das Integral, welches Jacobi als canonisches Integral zweiter Gattung gelten lässt

$$\int_0^x \frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2.1-k^2x^2}} = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,.\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{k^2}F(\varphi, k) - \frac{1}{k^2}E(\varphi, k).$$

Das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{(1-k^2a^2x^2)\sqrt{1-x^2 . 1-k^2x^2}}$$

wird von den Stellen $x = \pm 1 : ak$ logarithmisch unendlich und heisst deshalb ein Integral dritter Gattung. In der Legendre'schen Bezeichnung ist es

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-a^2k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(\varphi, k, a).$$

Die Umkehrung der Integrale

$$u = F(\varphi) = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

bezeichnet Jacobi mit

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{am} u \quad \text{(amplitudo)}$$

und gelangt dadurch, dass er die trigonometrischen Functionen dieses Ausdruckes nimmt, zu den Bezeichnungen

$$\sin\operatorname{am} u, \quad \cos\operatorname{am} u, \quad \operatorname{tg}\operatorname{am} u.$$

Auch bedient er sich der Bezeichnung

$$\operatorname{coam} u = \operatorname{am}(K-u).$$

Der Modul k wird fortgelassen, wo es ohne Zweideutigkeit angeht.

Ist $\omega(x)$ eine Function der complexen Veränderlichen x, so ist

$$\frac{i\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial z}, \quad \frac{i\partial^2\omega}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = -\frac{i\partial\omega}{\partial y\,\partial z},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} = 0.$$

Dieser Differentialgleichung müssen der reelle und imaginäre Theil von ω für sich Genüge leisten. Durch diese Differentialgleichung wird die Verwandtschaft mehrerer physikalischen Theorien mit der Theorie der complexen Functionen begründet.

Theorie

der

Thetafunctionen einer Veränderlichen

oder der Reihe

$$\sum_{(n)\,-\infty}^{+\infty} e^{an^2+2nx}.$$

Art. 1. Die Functionalgleichungen der ϑ-Functionen. Das Verschwinden der ϑ-Functionen.

Wir betrachten die ϑ-Functionen einer Veränderlichen als Integral (Lösung) der beiden Functionalgleichungen.

$$(1.)\quad \vartheta_{hg}(x+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}.\vartheta_{hg}(x),$$

$$(2.)\quad \vartheta_{hg}(x+\varkappa a) = (-1)^{g\varkappa}.e^{-a\varkappa^2-2\varkappa x}.\vartheta_{hg}(x),$$

worin h, g, $\varkappa$, λ beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind.

Ausserdem sollen die ϑ-Functionen für alle endliche Werthe von x endliche einwerthige und stetige Functionen der complexen Variabeln x sein.

Um die Functionalgleichungen (1) und (2) zu integriren, machen wir zuerst die Substitution $x = \lg t$. Für jeden Werth von t nimmt x einen endlichen Werth an, wenn t von 0 und ∞ verschieden ist. Es ist $t = e^x$ eine für alle endliche Werthe von x stetige und einwerthige Function. Jedem bestimmten Werthe von x, oder einem um ein ganzes Multiplum von $2\pi i$ davon verschiedenen, entspricht ein einziger Werth von t, weil $e^{x+2m\pi} =$

$e^x = t$ ist.*) Demnach ist $\vartheta_{hg}(\lg t) = \varphi(t)$ eine für alle Werthe von t stetige und einwerthige Function der complexen Veränderlichen t, wenn t innerhalb eines Ringes zwischen einem in Nullpunkte centrischen beliebig kleinen und einem beliebig grossen Kreise verläuft. Denn wenn t sich um den Punkt Null einmal herumbewegt, so ändert sich $\lg(t)$ um $2\pi i$, aber $\varphi\,(t)$ bleibt wegen der Gleichung (1) ungeändert. Eine solche Function lässt sich nach dem Laurent'scheu Satze (XVII. pag. 45) nach auf- und absteigenden Potenzen in eine unendliche Reihe entwickeln. Wir wissen jedoch noch nicht, ob eine stetige einwerthige Function von x existirt, welche die Gleichungen (1) und (2) befriedigt. Wäre die Existenz nachgewiesen, so stände die Convergenz der Reihe (nach XVII.) fest. Da dies aber nicht der Fall ist, so wird erst umgekehrt aus der Convergenz der Reihe die Existenz zu folgern sein.**)

Setzen wir also

$$\vartheta_{hg}(x) = \varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} A^m t^m = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} A_m e^{mx},$$

so folgt aus der Functionalgleichung (1)

$$\vartheta_{hg}(x+i\pi) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} A_m e^{xm}.(-1)^m$$

$$= (-1)^h \vartheta_{hg}(x) = (-1)^h \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} A_m e^{xm},$$

und hieraus nach Satz XVII., $A_m(-1)^{h+m} = A_m$, oder wenn man $2n+h$ und $2n+h+1$ für m setzt:

$$A_{2n+h} = A_{2n+h}, \quad A_{2n+h+1} = -A_{2n+h+1} = 0.$$

Also ist A_{2n+h} unbestimmt und

$$\vartheta_{hg}(x) = e^{hx}.\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_n e^{2nx},$$

wenn B_n für A_{2n+h} gesetzt wird.

---

*) Unter m und n sollen im Folgenden durchgehend ganze positive oder negative Zahlen verstanden werden.

**) Anstatt, wie hier geschieht, die ϑ-Functionen als Lösungen willkürlich aufgestellter Functionalgleichungen anzusehen, könnte man dazu von der σ-Function gelangen, welche (pag. 72) ganz ähnlichen Functionalgleichungen genügt und sich in der That von einer ϑ-Function nur durch einen exponentiellen Factor unterscheidet, wie wir später sehen werden.

Nun wenden wir auf diese Reihe die Functionalgleichung (2) an, so ist

$$\vartheta_{hg}(x+a\varkappa) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_n e^{2nx+hx+2na\varkappa+ha\varkappa} =$$

$$\vartheta_{hg}(x) \,.\, e^{-a\varkappa^2-2\varkappa x-g\varkappa i\pi} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} B_m e^{-a\varkappa^2-2(m-\varkappa)x+hx-g\varkappa i\pi}.$$

Setzen wir in dem letzten Ausdrucke n statt $m-\varkappa$, so führen wir dadurch nur eine veränderte Zählung der Glieder ein und erhalten

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} e^{-a\varkappa^2+(2n+h)x-g\varkappa i\pi} B_{n+\varkappa} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} e^{(2n+h)x+2na\varkappa+ha\varkappa} . B_n,$$

woraus wiederum nach XVII. folgt

$$B_n e^{2na\varkappa+ha\varkappa} = B_{n+\varkappa} \,.\, e^{-a\varkappa^2-g\varkappa i\pi}.$$

Hierdurch wird jeder Coefficient mit jedem andern, B_m mit B_n in Verbindung gesetzt, weil $\varkappa$ eine willkürliche ganze positive oder negative Zahl ist. Man sieht a posteriori leicht ein, dass diese unendlich vielen Gleichungen nicht im Widerspruche mit einander stehen. Es ist aber für $n = 0$,

$$B_\varkappa = B_0 \,.\, e^{ah\varkappa+a\varkappa^2+g\varkappa i\pi},$$

worin $\varkappa$ beliebig ist, also durch m ersetzt werden kann. So haben wir denn, B statt B_0 gesetzt:

$$\vartheta_{hg}(x) = B \,.\, e^{hx} . \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} e^{2m(x+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}gi\pi)+am^2}$$

und

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = e^{2an+(h+1)a+2x+gi\pi}, \quad \frac{B_{-n-1}}{B_{-n}} = e^{2na-(h-1)a-2x-gi\pi}.$$

Beide Quotienten nähern sich mit wachsendem n der Null dann und nur dann, wenn a einen negativen reellen Theil besitzt, und die Reihe convergirt unter dieser Voraussetzung für beliebige endliche Werthe von x.

Die Constante B beschränken wir durch die partielle Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{4\partial\vartheta_{hg}(x)}{\partial a} = \frac{\partial^2\vartheta_{hg}(x)}{\partial x^2}.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$\frac{4\partial B}{\partial a} = h^2 B, \text{ also } B = e^{\frac{1}{4}h^2 a} \,.\, C$$

und C von a unabhängig genommen wird. Es soll aber $C = e^{\frac{1}{2}hgi\pi}$ gesetzt werden, so dass nun die ϑ-Function völlig bestimmt ist durch die Gleichung

$$(4.) \qquad \vartheta_{hg}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} e^{a[\frac{1}{2}(2n+h)]^2 + \frac{1}{2}(2n+h)(2x+gi\pi)}.$$

Die Functionalgleichungen (1.) und (2.) und die partielle Differentialgleichung (3.) bestimmen also eine ϑ-Function bis auf einen willkürlichen von x und a unabhängigen Factor.

Ist $h = 0$, $g = 0$, so lassen wir an der ϑ-Function die Indices fort und haben

$$\vartheta(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} e^{an^2+2nx} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} e^{an^2}\left(e^{2nx} + e^{-2nx}\right).$$

Diese Function ändert offenbar ihren Werth nicht, wenn man x in $-x$ verwandelt, in einer Entwicklung nach Potenzen von x können daher nur gerade Potenzen vorkommen. Daraus folgt

(5.) *$\vartheta(x)$ ist eine gerade Function von x.*

Die Grösse $i\pi$ heisst die Periode, a der Modul der ϑ-Functionen, welcher zuweilen noch angedeutet werden muss, was durch die Schreibweise $\vartheta(x, a)$ geschieht. Es ist in derselben

$$\vartheta(x, a+2m\pi i) = \vartheta(x,a), \quad \vartheta(x, a+m\pi i) = \vartheta(x+\tfrac{1}{2}m\pi i, a).$$

Die ϑ-Function $\vartheta_{hg}(x)$ wird mittels der Gleichung, (deren Richtigkeit aus der Definition durch die Reihe unmittelbar ersichtlich ist,)

$$(6.) \qquad \vartheta_{hg}(x) = e^{hx+\frac{1}{4}h^2a+\frac{1}{2}hgi\pi} \,.\, \vartheta(x+\tfrac{1}{2}ah+\tfrac{1}{2}gi\pi)$$

auf die ohne Index zurückgeführt. Es reicht hin für h und g die beiden Zahlen 0 und 1 zu setzen, also die vier ϑ-Functionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_{01}(x)$, $\vartheta_{10}(x)$, $\vartheta_{11}(x)$ zu betrachten, weil auf diese die übrigen mittels der Gleichungen (1.) und (2.) zurückgeführt werden. Und zwar ist

$$(6.^a) \qquad \vartheta_{2n+h,\, 2m+g}(x) = (-1)^{mh} \,.\, \vartheta_{hg}(x).$$

Es ist weiter [nach (5.) und (6.)]

$$\begin{aligned} \vartheta_{hg}(x) &= e^{\frac{1}{4}h^2a+hx+\frac{1}{2}ghi\pi} \,.\, \vartheta(x+\tfrac{1}{2}ah+\tfrac{1}{2}i\pi g) \\ &= e^{\frac{1}{4}h^2a+hx+\frac{1}{2}ghi\pi} \,.\, \vartheta(-x-\tfrac{1}{2}ah-\tfrac{1}{2}gi\pi) \\ &= e^{\frac{1}{4}h^2a+hx+\frac{1}{2}ghi\pi} \,.\, \vartheta(-x+\tfrac{1}{2}ha+\tfrac{1}{2}gi\pi) \,.\, e^{-h^2a+2h(\frac{1}{2}ha+\frac{1}{2}gi\pi)-2hx} \\ &= e^{hgi\pi} \,.\, \vartheta_{h,g}(-x). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

(7.) *$\vartheta_{hg}(x)$ ist eine gerade Function, wenn $h.g$ gerade ist,*

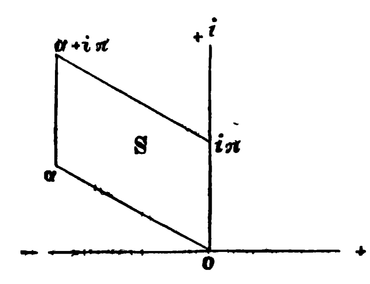
eine ungerade Function, wenn h.g ungerade ist. $\vartheta_{11}(x)$ *wird für* $x = 0$ *und* $\vartheta(x)$ *für* $x = \frac{1}{2}(a+i\pi)$ *Null.*

Mit Hilfe des Satzes XI. pag. 40 zeigen wir leicht, dass für andere Werthe als den in der Form

$$x = \tfrac{1}{2}(2m+1)\,a+\tfrac{1}{2}(2n+1)i\pi$$

enthaltenen die Function $\vartheta(x)$ nicht verschwindet.

Wir suchen die Anzahl der Puncte, für welche $\vartheta(x)$ verschwindet, innerhalb eines Parallelogramms, dessen Ecken o, $i\pi$, $a+i\pi$, a sind.



Da $\vartheta(x)$ in diesem Parallelogramm nicht Unendlich wird, so wächst nach XI. lg $\vartheta(x)$ um so viele ganze Multipla von $2\pi i$, wenn x in positiver Richtung um die Begrenzung s des Parallelogramms herumgeführt wird*), als Puncte im Innern desselben vorhanden sind, für welche $\vartheta(x)$ verschwindet. Dieser Zuwachs ist aber

$$\int_{(s)} d\lg\vartheta(x) = \int_0^{i\pi} d\lg\vartheta(x) + \int_{i\pi}^{a+i\pi} d\lg\vartheta(x) + \int_{a+i\pi}^{a} d\lg\vartheta(x) + \int_a^0 d\lg\vartheta(x)$$

$$= \int_0^{i\pi} d\lg\vartheta(x) + \int_0^a d\lg\vartheta(x+i\pi) + \int_{i\pi}^0 d\lg\vartheta(x+a) + \int_a^0 d\lg\vartheta(x)$$

$$= \int_0^{i\pi} d\lg\left(\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(x+a)}\right) + \int_0^a d\lg\left(\frac{\vartheta(x+i\pi)}{\vartheta(x)}\right) = 2\int_0^{i\pi} dx = 2\pi i.$$

Es wird demnach, da nach Satz X. pag. 39 eine gebrochene Ordnung unmöglich ist, $\vartheta(x)$ in jenem Parallelogramm nur an einer einzigen Stelle Null, und zwar in der ersten Ordnung.

Eine analoge Behandlung des Integrales $\int \lg\vartheta(x)\,dx$ (nach der pag. 64 angewendeten Methode) liefert den Werth von x, für welchen $\vartheta(x)$ verschwindet; allein wir haben diesen schon früher in anderer Weise gefunden und da die Functionalgleichungen (1.) und (2.) die in dem Parallelogramm gegebene Function durch die ganze Ebene fortsetzen, so haben wir die Gleichung

*) Sollte ein Punct auf die Begrenzung des Parallelogrammes fallen, so muss dieselbe durch parallele Ausbiegungen abgeändert werden.

$$(8.)\qquad \vartheta\left(\frac{2m+1}{2}\,a+\frac{2n+1}{2}\,i\pi\right)=0$$

und es verschwindet $\vartheta(x)$ für keinen andern Werth von x.

Vermehrt man in einer ϑ-Function das Argument x um $\frac{1}{2}i\pi$, oder $\frac{1}{2}a$, se kann man dieselbe durch eine ϑ-Eunction mit veränderten Indices ausdrücken, wie folgende Tabelle angiebt:

$$(9.)\quad \vartheta(x+\tfrac{1}{2}i\pi)=\vartheta_{01}(x),\qquad \vartheta(x+\tfrac{1}{2}a)=e^{-x-\frac{1}{4}a}\vartheta_{10}(x),$$
$$\vartheta(x+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}i\pi)=-ie^{-x-\frac{1}{4}a}\,\vartheta_{11}(x)$$
$$\vartheta_{01}(x+\tfrac{1}{2}i\pi)=\vartheta(x),\qquad \vartheta_{01}(x+\tfrac{1}{2}a)=-ie^{-x-\frac{1}{4}a}\vartheta_{11}(x),$$
$$\vartheta_{01}(x+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}i\pi)=e^{-x-\frac{1}{4}a}\,\vartheta_{10}(x)$$
$$\vartheta_{10}(x+\tfrac{1}{2}i\pi)=\vartheta_{11}(x),\ \vartheta_{10}(x+\tfrac{1}{2}a)=e^{-x-\frac{1}{4}a}\vartheta(x),$$
$$\vartheta_{10}(x+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}i\pi)=-ie^{-x-\frac{1}{4}a}\,\vartheta_{01}(x)$$
$$\vartheta_{11}(x+\tfrac{1}{2}i\pi)=-\vartheta_{10}(x),\ \vartheta_{11}(x+\tfrac{1}{2}a)=-ie^{-x-\frac{1}{4}a}\vartheta_{01}(x),$$
$$\vartheta_{11}(x+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}i\pi)=-e^{-x-\frac{1}{4}a}\,\vartheta(x).$$

Die ϑ-Functionen, in denen die Argumentwerthe halbe Perioden oder Moduln sind, lassen sich durch solche mit den Argumentwerthen 0 und veränderten Indices ausdrücken. Wir lassen die betreffenden Gleichungen hier folgen, und lassen dabei das Argument 0, wie auch später bei diesen Functionen immer, fort. Man erhält sie aus (9.) wenn man darin $x=0$ setzt.

(9ª.)

$$\vartheta\left(\frac{i\pi}{2}\right)=\vartheta_{01},\qquad \vartheta\left(\frac{a}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta_{10},\qquad \vartheta\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)=0,$$
$$\vartheta_{01}\left(\frac{i\pi}{2}\right)=\vartheta,\qquad \vartheta_{01}\left(\frac{a}{2}\right)=0,\quad \vartheta_{01}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta_{10},$$
$$\vartheta_{10}\left(\frac{i\pi}{2}\right)=0,\qquad \vartheta_{10}\left(\frac{a}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}a}.\vartheta,\quad \vartheta_{10}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)=-ie^{-\frac{1}{4}a}\vartheta_{10},$$
$$\vartheta_{11}\left(\frac{i\pi}{2}\right)=-\vartheta_{10},\ \vartheta_{11}\left(\frac{a}{2}\right)=-ie^{-\frac{1}{4}a}\vartheta_{01},\ \vartheta_{11}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{1}{4}a}\vartheta.$$

Art. 2. Beziehungen zwischen den Quadraten der ϑ-Functionen. Das Produkt $\vartheta_{h,g}(x+\xi).\vartheta_{h',g'}(x-\xi)$.

Die Functionalgleichungen (1.) und (2.) bedürfen nur einer geringen Erweiterung, damit sie die wichtigsten Beziehungen zwischen den vier ϑ-Functionen liefern. Ist p eine ganze positive Zahl, so beweisen wir leicht den wichtigen Satz:

(10.) *Zwischen $p+1$, für endliche Werthe des Argumentes eindeutigen und stetigen, also auch endlichen Functionen, welche die Gleichungen*

$$(11.)\quad \varphi(x+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}.\varphi(x),$$

$$(12.)\quad \varphi(x+\varkappa a) = (-1)^{g\varkappa}.\, e^{-a\varkappa^2 p - 2\varkappa x p}.\, \varphi(x)$$

befriedigen, besteht stets eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, von denen einige auch Null sein können.

Offenbar genügt die Function $\vartheta_{h,g}(x).\vartheta^{p-1}(x)$ den Anforderungen (10.), (11.), (12.), und es steht daher (nach Satz XVII. pag. 45) a priori fest, dass $\varphi(x)$ nach auf- und absteigenden Potenzen von e^x in eine für alle endliche x convergente Reihe sich entwickeln lässt. Da die Gleichung (11.) von der Gleichung (1.) nicht verschieden ist, so hat die Reihe die Form

$$\varphi(x) = e^{hx}\sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{2nx}.$$

Die Gleichung (12.) auf diese Reihe angewendet, liefert

$$e^{hx+h\varkappa a}.\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_n e^{2nx+2n\varkappa a}$$

$$= e^{-ap\varkappa^2-2p\varkappa x}.\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_n.e^{2nx+hx+g\varkappa i\pi}$$

$$= e^{-ap\varkappa^2+hx+g\varkappa i\pi}.\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} B_{n+\varkappa p}.e^{2nx},$$

in welcher letzten Gleichung die Zählung der Glieder um $p\varkappa$ verschoben ist. Hieraus folgt:

$$B_n e^{2n\varkappa a+h\varkappa a} = e^{-ap\varkappa^2+g\varkappa i\pi}.B_{n+\varkappa p},$$

$$B_{n+\varkappa p} = B_n.e^{ap\varkappa^2+2n\varkappa a+h\varkappa a+g\varkappa i\pi}.$$

Somit werden alle Coefficienten, die um p Glieder von einander entfernt stehen, mit einander verknüpft. Ist r eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots p-1$, und setzt man $n = \varkappa p + r$, so erhält man

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{p-1}{}_{(r)}\Big(B_r e^{hx}.\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(\varkappa)} e^{ap\varkappa^2+2r\varkappa a+2p\varkappa x+2rx+h\varkappa a+g\varkappa i\pi}\Big)$$

$$= \sum_{0}^{p-1}{}_{(r)} B_r e^{(2r+h)x}.\vartheta\Big(px+\frac{2r+h}{2}a+g\frac{i\pi}{2},\ pa\Big).$$

Die hierin vorkommenden ϑ-Functionen sind Potenzreihen, die alle verschiedene Potenzen von e^x enthalten, so dass keine

lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen ihnen Statt hat. Demnach lässt sich jede Function $\varphi(x)$, welche den Gleichungen (11.) und (12.) Genüge leistet, durch p von einander unabhängige ϑ-Functionen linear und homogen ausdrücken, womit der Satz (10.) bewiesen ist.

Hiervon machen wir Anwendung für den Fall $p = 2$, welcher der einfachste ist. Zuerst ist

$$\vartheta^2{}_{hg}(x) = \alpha\vartheta^2{}_{h'g'}(x)+\beta\vartheta^2{}_{h''g''}(x),$$

weil zwischen den drei Quadraten nach (10.) eine lineare Beziehung Statt haben muss. Wir müssen natürlich voraussetzen, dass hg; $h'g'$; $h''g''$ von einander verschiedene Systeme der Indices sind, weil im andern Falle der Coefficient eines der drei Quadrate Null sein müsste. Da wir vier ϑ-Functionen haben, so können wir eine, etwa $\vartheta_{01}(x)$, mit je zwei der drei anderen verbinden. Eine der drei so erhaltenen Gleichungen muss jedoch eine Folge der andern sein, weil sich aus je zweien eine der ϑ-Functionen eliminiren lässt. Wir betrachten daher nur die beiden Gleichungen:

$$\vartheta^2_{01}(x) = \alpha'\vartheta^2_{11}(x) + \beta'\vartheta^2_{10}(x), \qquad \vartheta^2_{01}(x) = \alpha''\vartheta^2_{11}(x)+\beta''\vartheta^2(x).$$

Für $x = 0$ haben wir

$$\beta' = \vartheta^2_{01} : \vartheta^2_{10}, \qquad \beta'' = \vartheta^2_{01} : \vartheta^2.$$

$$\text{Für } x = \frac{i\pi}{2}, \qquad \alpha' = \vartheta^2_{01}\left(\frac{i\pi}{2}\right) : \vartheta^2_{11}\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \vartheta^2 : \vartheta^2_{10}.$$

$$\text{Für } x = \frac{a+i\pi}{2}, \qquad \alpha'' = \vartheta^2_{01}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right) : \vartheta^2_{11}\left(\frac{a+i\pi}{2}\right) = \vartheta^2_{10} : \vartheta^2.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$(13.) \qquad \frac{\vartheta^2_{10}}{\vartheta^2} = k, \qquad \frac{\vartheta^2_{01}}{\vartheta^2} = k',$$

so haben wir hieraus

$$(14.) \qquad k\vartheta^2_{01}(x) = \vartheta^2_{11}(x)+k'\vartheta^2_{10}(x),$$

$$(15.) \qquad \vartheta^2_{01}(x) = k\vartheta^2_{11}(x)+k'\vartheta^2(x),$$

und setzen wir in der letzten Gleichung $x = \frac{1}{2}i\pi$, so liefert sie die wichtigen Relationen:

$$(16.) \quad \begin{cases} 1 = k\dfrac{\vartheta^2_{10}}{\vartheta^2} + k'\dfrac{\vartheta^2_{01}}{\vartheta^2} = k^2+k'^2, \\ \vartheta^4 = \vartheta^4_{10}+\vartheta^4_{01}. \end{cases}$$

Die Function $\vartheta_{hg}(x+\xi)\,\vartheta_{h'g'}(x-\xi)$ genügt sowohl als Function

von x als auch von ξ den Functionalgleichungen (11.) und (12.), wenn dort $p=2$ gesetxt wird. Man hat desshalb

$$\vartheta_{11}(x+\xi)\vartheta_{01}(x-\xi) =$$
$$[\alpha_{11}\vartheta_{11}(\xi)\vartheta_{01}(\xi)+\alpha_{12}\vartheta_{10}(\xi)\vartheta(\xi]\vartheta_{11}(x)\vartheta_{01}(x)$$
$$+[\alpha_{21}\vartheta_{11}(\xi)\vartheta_{01}(\xi)+\alpha_{22}\vartheta_{10}(\xi)\vartheta(\xi]\vartheta_{10}(x)\vartheta(x).$$

Für $\xi=0$ haben wir

$$\alpha_{12}=1:\vartheta.\vartheta_{10}\,,\qquad \alpha_{22}=0.$$

Für $\xi=\frac{1}{2}i\pi$

$$\alpha_{11}=0,\qquad \alpha_{21}=1:\vartheta.\vartheta_{10}$$

und folglich

17. $$\vartheta.\vartheta_{10}.\vartheta_{11}(x+\xi)\vartheta_{01}(x-\xi) =$$
$$\vartheta_{10}(\xi)\vartheta(\xi)\vartheta_{11}(x)\vartheta_{01}(x)+\vartheta_{10}(x)\vartheta(x)\vartheta_{11}(\xi)\vartheta_{01}(\xi),$$

und wenn man ξ in $-\xi$ verwandelt

(18.) $$\vartheta.\vartheta_{10}.\vartheta_{11}(x-\xi)\vartheta_{01}(x+\xi) =$$
$$\vartheta_{10}(\xi)\vartheta(\xi)\vartheta_{11}(x)\vartheta_{01}(x)-\vartheta_{10}(x)\vartheta(x)\vartheta_{11}(\xi)\vartheta_{01}(\xi).$$

Dieselbe Methode liefert

(19.) $$\vartheta_{01}^2.\vartheta_{01}(x+\xi)\vartheta_{01}(x-\xi)=\vartheta_{01}^2(x)\vartheta_{01}^2(\xi)-\vartheta_{11}^2(x)\vartheta_{11}^2(\xi).$$

Setzt man hierin $x+\frac{1}{2}\pi i$ für x, so folgt

(20.) $$\vartheta_{01}^2.\vartheta(x+\xi).\vartheta(x-\xi)=\vartheta^2(x)\vartheta_{01}^2(\xi)-\vartheta_{10}^2(x)\vartheta_{11}^2(\xi).$$

Weiter ist

(21) $$\vartheta_{10}.\vartheta_{01}.\vartheta_{10}(x+\xi).\vartheta_{01}(x-\xi) =$$
$$\vartheta_{10}(x)\vartheta_{01}(x).\vartheta_{10}(\xi)\vartheta_{01}(\xi)-\vartheta(x)\vartheta_{11}(x)\vartheta(\xi)\vartheta_{11}(\xi),$$

und wenn man $-\xi$ für ξ setzt

(22.) $$\vartheta_{10}.\vartheta_{01}.\vartheta_{10}(x-\xi).\vartheta_{01}(x+\xi) =$$
$$\vartheta_{10}(x)\vartheta_{01}(x)\vartheta_{10}(\xi)\vartheta_{01}(\xi)+\vartheta(x)\vartheta_{11}(x)\vartheta(\xi)\vartheta_{11}(\xi).$$

Endlich ist

23.) $$\vartheta.\vartheta_{01}.\vartheta(x+\xi).\vartheta_{01}(x-\xi) =$$
$$\vartheta(x)\vartheta_{01}(x)\vartheta(\xi)\vartheta_{01}(\xi)-\vartheta_{10}(x)\vartheta_{11}(x)\vartheta_{10}(\xi)\vartheta_{11}(\xi),$$

(24.) $$\vartheta.\vartheta_{01}.\vartheta(x-\xi).\vartheta_{01}(x+\xi) =$$
$$\vartheta(x)\vartheta_{01}(x)\vartheta(\xi)\vartheta_{01}(\xi)+\vartheta_{10}(x)\vartheta_{11}(x)\vartheta_{10}(\xi)\vartheta_{11}(\xi).$$

Diese einfachen Formeln reichen hin, um die wichtigsten Sätze der Theorie der elliptischen Functionen herzuleiten, welche Functionen Quotienten zweier ϑ-Functionen sind.

Art. 3. Die elliptischen Functionen und ihr Additionstheorem.

Um unsere Formeln mit den in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchlichen in Einklang zu bringen, führen wir die folgende neue Bezeichnung ein. Wir setzen

$$x = -\frac{u\pi i}{2K}, \quad a = -\pi\frac{K'}{K}, \quad e^a = q$$

$$\Theta_{hg}(u) = \vartheta_{hg}\left(-\frac{\pi u i}{2K}, -\pi\frac{K'}{K}\right), \quad \Lambda(u) = \frac{\Theta_{11}(u)}{\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u)}$$

Die Function $\Lambda(u)$ hängt ausser von u auch noch von dem Verhältnisse $K' : K$ ab, und auch noch von K, weil die Θ-Reihen noch Potenzen von $e^{\frac{\pi u i}{2K}}$ fortschreiben. Im folgenden Artikel wird sich zeigen, dass $\Lambda(u) = \sin \operatorname{am} [u\Lambda'(0)]$ ist, wenn unter sinus amplitudo dieselbe Function verstanden wird, als pag. 108, und dass mithin, wenn der Differentiatquotient von Λ nach u für $u = 0$, also $\Lambda'(0)$ gleich 1 ist, $\Lambda(u)$ mit sin am u übereinstimmt. In diesem Falle ist aber durch $K' : K$ die Grösse K schon selbst mit bestimmt, und wir wollen dann $\lambda(u)$ für $\Lambda(u)$ schreiben. Die Formeln dieses Artikels nun, die weiter nichts sind, als Beziehungen zwischen Θ-Quotienten, für welche abkürzende Bezeichnungen geschaffen sind, gelten, gleichviel ob die Beziehung zwischen K' und K besteht, durch welche die Θ-Quotienten (25.), (26.), (27.) direct die elliptischen Functionen sind, oder ob K' und K willkürliche Grössen sind, in welchem Falle etwa $M(u)$ für $\mu(u)$, $N(u)$ für $\nu(u)$ geschrieben werden kann. Es sind aber die Formeln hier in der für elliptischen Functionen üblichen Bezeichnung aufgestellt, damit sie gleich als Formeltafeln benutzt werden können. Es sei

$$\text{(25.)} \quad \sin \operatorname{am}(u) = \lambda(u) = \frac{\Theta_{11}(u)}{\sqrt{k}\,.\,\Theta_{01}(u)},$$

$$\text{(26.)} \quad \cos \operatorname{am}(u) = \mu(u) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\Theta_{10}(u)}{\Theta_{01}(u)},$$

$$\text{(27.)} \quad \Delta \operatorname{am}(u) = \nu(u) = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta(u)}{\Theta_{01}(u)}.$$

Für positiv reelle Werthe von u, K und q (es muss, damit die Reihen convergiren abs. (q) immer < 1 sein), haben die vier Θ-Functionen positiv reelle Werthe, wenn u klein genug genommen wird, wie man aus den Reihen erkennt:

$$\Theta(u) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} q^{m^2} . e^{\frac{m\pi u i}{K}} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} q^{m^2}\left(e^{\frac{m\pi u i}{K}} + e^{-\frac{m\pi u i}{K}}\right),$$

$$(28.)\begin{cases} \Theta(u) = 1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} q^{m^2}\cos\frac{m\pi u}{K}, \\ \Theta_{10}(u) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} q^{m(m+1)}\cos\frac{(2m+1)\pi u}{2K}, \\ \Theta_{01}(u) = 1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}(-1)^m q^{m^2}\cos\frac{m\pi u}{K}, \\ \Theta_{11}(u) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}(-1)^m . q^{m(m+1)} . \sin\frac{(2m+1)\pi u}{2K}. \end{cases}$$

Ist q reell und <1, so erkennt man aus diesen Reihen mit Leichtigkeit, dass alle vier Θ-Functionen für alle reellen u reell sind, und war $\Theta(u)$ und $\Theta_{01}(u)$ stets positiv, $\Theta_{10}(u)$ positiv von $-K$ bis K, negativ von K bis $3K$, etc. $\Theta_{11}(u)$ ist von 0 bis $2K$ positiv, von $2K$ bis $4K$ negativ etc. Da die Θ-Functionen nicht unendlich werden, so können sie ihr Zeichen nur da wechseln, wo sie verschwinden. Für rein imaginäre u sind die Cosinus positiv reell und also $\Theta(u)$ und $\Theta_{10}(u)$ immer positiv reell. $\Theta_{01}(u)$ positiv reell von $-iK'$ bis iK' von da negativ bis $3iK'$ etc. Die ungerade Θ-Function, $\Theta_{11}(u)$ ist negativ imaginär von 0 bis $2iK'$, positiv von $2iK'$ bis $4iK'$ etc.

$$\sqrt{k} = \Theta_{10} : \Theta = 2\sqrt[4]{q}\sum q^{m.m+1} : 1+2\sum q^{m^2}$$

ist positiv reell und kleiner als Eins. Für reelle u zwischen 0 und $2K$ ist $\lambda(u) = \sin \operatorname{am} u$ positiv reell, zwischen $2K$ und $4K$ negativ reell.

Aus den Gleichungen (14.) und (15.) folgt in unserer neuen Bezeichnung

(29.) $1 = \sin \operatorname{am}^2(u) + \cos \operatorname{am}^2(u)$, oder $\lambda^2(u) + \mu^2(u) = 1$,

(30.) $1 = \Delta \operatorname{am}^2(u) + k^2 \sin \operatorname{am}^2(u)$, oder $\nu^2(u) + k^2\lambda^2(u) = 1$,

(31.) $k'^2 = \Delta^2 \operatorname{am}(u) - k^2\cos^2 \operatorname{am}(u)$ oder $k'^2 = \nu^2(u) - k^2\mu^2(u)$.

Es sind aber $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ doppelt periodische Functionen, indem

(32.) $\lambda(u+4K) = \lambda(u)$, $\lambda(u+2iK') = \lambda(u)$, $\lambda(u+2K) = -\lambda(x)$
$\mu(x+4K) = \mu(x)$, $\mu(x+2iK') = -\mu(x)$, $\mu(x+2K) = -\mu(x)$,
$\nu(x+4K) = \nu(x)$, $\nu(x+2iK') = -\nu(x)$, $\nu(x+2K) = \nu(x)$

ist, $4K$ und $2iK'$ heissen die Perioden der Function $\lambda(u)$ oder sin am (u), $\mu(u)$ hat die Perioden $4K$ und $2iK'+2K$, $\nu(u)$ hat die Perioden $2K$ und $4iK'$. In diesen doppelt periodischen Functionen

muss $-\pi\frac{K'}{K}$ einen negativen reellen Theil besitzen, weil sonst die Θ-Reihen nicht convergiren. Da eine Periode $4K$ auch eine Periode $-4K$ ist, so kommt es nur darauf an, dass $\frac{K'}{K}$ nicht eine rein imaginäre Zahl ist. Wir wissen aber schon (XXV. pag. 56), dass

„Eine einwerthige doppelt periodische Function, einer complexen Veränderlichen, deren Perioden in einem reellen Verhältnisse zu einander stehen, nicht existirt.“

Alle drei Functionen $\lambda(u)$, $\mu(u)$, $\nu(u)$ werden unendlich gross für $u = iK' + 2mK + 2niK'$, $\lambda(u)$ ist eine ungerade Function und verschwindet für $u = 2mK + 2niK'$, $\mu(u)$ ist eine gerade Function und verschwindet für $u = K + 2mK + 2niK'$, $\nu(u)$ ist eine gerade Function und verschwindet für $u = iK' + K + 2mK + 2niK'$, und es ist

$$(33.)\quad \mu(0) = 1, \quad \nu(0) = 1, \quad \mu'(0) = 0, \quad \nu'(0) = 0,$$
$$\lambda(K) = 1,\ \mu(K) = 0,\ \nu(K) = k';$$
$$\lambda(K+iK') = \frac{1}{k},\ \mu(K+iK') = -\frac{k'i}{k},\ \nu(K+iK') = 0.$$

Das Additionstheorem der doppelt periodischen Functionen $\lambda(u)$ erhält man durch Division der Gleichung (19.) in die (17.). Es folgt durch Einführung der neuen Bezeichnung in diese Gleichungen:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{01}}\,\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{01}}.\lambda(u+v) = \frac{\dfrac{\Theta_{11}(u)\,\Theta_{01}(u)\,\Theta_{10}(v)\,\Theta(v) + \Theta_{10}(u)\,\Theta(u)\,\Theta_{11}(v)\,\Theta_{01}(v)}{\Theta_{01}^2(u)\;\Theta_{01}^2(v)}}{\dfrac{\Theta_{01}^2(u)\;\Theta_{01}^2(v) - \Theta_{11}^2(u)\;\Theta_{11}^2(v)}{\Theta_{01}^2(u)\,.\,\Theta_{01}^2(v)}}$$

und mit (13.)

$$(34.)\quad \lambda(u+v) = \frac{\lambda(u)\,\mu(v)\,\nu(v) + \lambda(v)\,\mu(u)\,\nu(u)}{1 - k^2\lambda^2(u)\,\lambda^2(v)}.$$

Dividirt man die Gleichung (21.) durch die (19.), so erhält man in ähnlicher Weise

$$(35.)\quad \mu(u+v) = \frac{\mu(u)\,\mu(v) - \nu(u)\,\nu(v)\,\lambda(u)\,\lambda(v)}{1 - k^2\lambda^2(u)\,\lambda^2(v)},$$

und wenn man mit (19.) in (23.) dividirt,

$$(36.)\quad \nu(u+v) = \frac{\nu(u)\nu(v) - k^2\mu(u)\mu(v)\lambda(u)\lambda(v)}{1-k^2\lambda^2(u).\lambda^2(v)},$$

woraus für $v = u$ die Gleichungen fliessen:

$$(37.)\quad \begin{cases} \lambda(2u) = \dfrac{2\lambda(u)\mu(u)\nu(u)}{1-k^2\lambda^4(u)}, \quad \mu(2u) = \dfrac{\mu^2(u)-\lambda^2(u)\nu^2(u)}{1-k^2\lambda^4(u)}, \\ \nu(2u) = \dfrac{\nu^2(u)-k^2\mu^2(u)\lambda^2(u)}{1-k^2\lambda^4(u)}. \end{cases}$$

Da nach (36.)

$$\nu(u)\nu(v) = \nu(u+v).[1-k^2\lambda^2(u)\lambda^2(v)] + k^2\mu(u)\mu(v)\lambda(u)\lambda(v)$$

ist, so folgt aus (35.)

$$(35\text{a.})\quad \mu(u+v) = \mu(u)\mu(v) - \lambda(u)\lambda(v)\nu(u+v)$$

und für $u = v$

$$(37\text{a.})\quad \begin{cases} \mu(2u) = \mu^2(u) - \lambda^2(u)\nu(2u) = 1-[1+\nu(2u)].\lambda^2(u) \\ \text{also} \\ \lambda^2(u) = [1-\mu(2u)] : [1+\nu(2u)]. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen stellt man leicht die folgende Tabelle her, bei deren Herstellung nur die Bestimmung der Vorzeichen einige Schwierigkeiten macht. Nimmt man k positiv reell und kleiner als 1, und ebenso k' positiv an, so sind die sämmtlichen darin vorkommenden Wurzeln so zu nehmen, dass der reelle Theil ihres Werthes positiv ist, wodurch sie völlig bestimmt sind.

Es sind in dieser Tabelle die Werthe $\lambda\left(m\frac{K}{2}+n\frac{iK'}{2}\right)$ enthalten und zwar entnimmt man diesen Werth aus der m^{ten} Horizontalreihe und der n^{ten} Vertikalreihe der durch die beiden Striche begrenzten Reihen z. B. $\lambda(0) = 0$, $\lambda(K+iK') = \lambda\left(2\frac{K}{2}+2\frac{iK'}{2}\right) = 1:k$. Die Werthe für $m > 4$ oder $n > 4$ findet man aus der Periodicität der Function $\lambda(x)$.

(38.) u	$0,$	$\frac{1}{2}iK',$	$iK',$	$\frac{3}{2}iK'$
0	$0,$	$i:\sqrt{k},$	$\infty,$	$-i:\sqrt{k}$
$\frac{1}{2}K$	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}},$	$\sqrt{\frac{k+ik'}{k}},$	$\sqrt{\frac{1}{1-k'}},$	$\sqrt{\frac{k-ik'}{k}},$
K	$1,$	$1:\sqrt{k},$	$1:k,$	$1:\sqrt{k}$
$\frac{3}{2}K$	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}},$	$\sqrt{\frac{k-ik'}{k}},$	$\sqrt{\frac{1}{1-k}},$	$\sqrt{\frac{k+ik'}{k}}$
$2K$	$0,$	$-i:k,$	$\infty,$	$i:\sqrt{k}.$

Aus den Gleichungen (9.) oder aus den Additionstheoremen, wenn man darin K, iK', $K+iK'$ für v setzt, folgen die Gleichungen:

$$(39.)\quad \lambda(u\pm K) = \pm\frac{\mu(u)}{\nu(u)},\ \lambda(u+K)=\lambda(K-u)\quad (=\sin\operatorname{coam} u),$$

$$\lambda(u\pm iK) = \frac{1}{k\lambda(u)},\quad \lambda(iK'+u) = -\lambda(iK'-u),$$

$$\lambda(u+K+iK') = \frac{\nu(u)}{k\mu(u)},\quad \lambda(2K-u) = \lambda(u),$$

$$\mu(u\pm K) = \pm\frac{k'\lambda(u)}{\nu(u)},\quad \mu(K-u) = \frac{k'\lambda(u)}{\nu(u)}\quad (=\cos\operatorname{coam} u),$$

$$\mu(K+u) = -\mu(K-u),\quad \mu(iK'\pm u) = \pm\frac{\nu(u)}{ik\lambda(u)},$$

$$\mu(u+K+iK') = \frac{k'}{ik\mu(u)};$$

$$\nu(u\pm K) = \frac{k'}{\nu(u)} = \nu(K-u)\quad (=\Delta\operatorname{coam} u),$$

$$\nu(u+iK') = \frac{\mu(u)}{i\lambda(u)},\quad \nu(u+K+iK') = \frac{ik'\lambda(u)}{\mu(u)},$$

$$\nu(iK'-u) = -\nu(iK'+u).$$

Art. 4. Die Differentialgleichungen der elliptischen Functionen.

Setzen wir in dem Additionstheorem (34.) $\Lambda(u)$ für $\lambda(u)$, $M(u)$, $N(u)$ für $\mu(u)$, $\nu(u)$, du für v und bezeichnen mit $\Lambda'(u)$ den ersten Differentialquotienten von Λ, so haben wir

$$\Lambda(u)du = \Lambda(du).M(u)N(u) = \Lambda'(u).M(u)N(u).du$$

oder $=$

$$\frac{d\Lambda(u)}{du} = \Lambda'(0)\sqrt{[1-\Lambda^2(u)].[1-k^2\Lambda^2(u)]},$$

woraus mit Fortlassung des Argumentes u hinter dem Zeichen Λ sich folgende Gleichung ergiebt:

$$du = \frac{d\Lambda}{\Lambda'(0)\sqrt{(1-\Lambda^2)(1-k^2\Lambda^2)}},\quad u = \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda}{\Lambda'(0)\sqrt{(1-\Lambda^2)(1-k^2\Lambda^2)}},$$

worin die zweiwerthige Function $\sqrt{(1-\Lambda^2)(1-k^2\Lambda^2)}$ für $\Lambda = 0$ den Zweigwerth $+1$ hat, weil für $u=0$, $M=1$, $N=1$ ist.

Diese Differentialgleichung oder das Integral derselben wird noch vereinfacht, wenn man $\Lambda'(0) = 1$ setzt, in welchem Falle wir λ für Λ, μ für M und ν für N schreiben. Da

$$\Lambda'(0) = \frac{\Theta'_{11}(0)}{\Theta_{01}(0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{-\pi i}{2K} \cdot \frac{\vartheta'_{11} \,.\, \vartheta}{\vartheta_{01} \,.\, \vartheta_{10}}$$

ist, so geschieht dies dadurch, dass man *)

$$(40.) \qquad K = \frac{-\pi i \,.\, \vartheta'_{11} \,.\, \vartheta}{2\vartheta_{01} \,.\, \vartheta_{10}}$$

setzt, wodurch die Variabilität von $a = \frac{-\pi K'}{K}$ nicht im mindesten beschränkt wird, also auch k noch völlig willkürlich bleibt. Unter dieser Voraussetzung ist nun

$$(41.) \quad u = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu \,.\, \nu},$$

welches die kanonische Form des sogenannten elliptischen Integrales erster Gattung ist. Die Umkehrung dieses elliptischen Integrals, d. h. die obere Grenze λ, als Function des Werthes u des Integrales, heisst eine elliptische Function und wird, wie schon früher bemerkt, von Jacobi mit Sinus Amplitudo u (sin am u) bezeichnet. Characteristisch ist für das Integral (41.)

dass es für keinen Werth von λ unendlich wird,

wenn nicht diese Variabele (oder der Integrationsweg) unendlich oft um die Puncte ± 1, $\pm 1:k$ herumgeführt wird, was wir pag. 95 et seqq. erörtert haben.

Wenn eine Function $\lambda(u)$ als Θ-Quotient gegeben ist, wozu K und K' gegeben sein müssen, und wenn $\lambda'(0) = 1$ ist, so ist auch der Modul k als Θ-Quotient bestimmt. Für $u = K$ hat dann λ den Werth 1, und es folgt daraus umgekehrt, dass $K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\mu.\nu}$ ist. Für $u = K + iK'$ hat λ den Werth $1:k$ und es folgt

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\mu.\nu} = K + iK', \quad iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\mu.\nu}.$$

Wenn man nun diesen Werth von k festhält und bildet die geradlinigen Integrale

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 . 1-k^2\lambda^2}} = \mathfrak{K}, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 . 1-k^2\lambda^2}} = i\mathfrak{K}',$$

*) $\vartheta'_{hg}(x)$ bedeutet den Differentialquotienten nach x, $\Theta'_{hg}(u)$ den nach u; wird das Argument fortgelassen, so ist x oder u gleich Null zu setzen.

indem man bei der Integration den Hauptzweig der Wurzel $[R_1(\lambda)$, wie er pag. 89 definirt ist] zu Grunde legt, so fragt es sich, ob K mit $\mathfrak{K}$, K' mit $\mathfrak{K}'$ nothwendig übereinstimmt. Diese Frage ist nicht überflüssig, denn nach dem, was pag. 103 bemerkt wurde, kann

$$K = \mathfrak{K} + 4m\mathfrak{K} + 2m'i\mathfrak{K}', \quad iK' = i\mathfrak{K}' + 4n\mathfrak{K} + 2n'i\mathfrak{K}'$$

sein, wenn m, m', n, n' positive oder negative ganze Zahlen sind. Wenn K und K' positiv reell sind, so ist ohne Weiteres klar, dass die Frage bejaht werden muss. Denn dann sind die Werthe, die der Θ-Quotient $\lambda(u)$ zwischen $u = 0$ und $u = K$ annimmt, immerfort positiv reell. Ebenso sind μ und ν in diesem Intervalle und mithin $\lambda'(u)$ positiv reell. Daher wächst λ stetig von 0 bis 1, ohne je abzunehmen, durchläuft also die Werthe dieses Intervalles sämmtlich einmal und nur einmal. Daraus folgt, dass das Integral

$$u = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 . 1-k^2\lambda^2}}$$

für $\lambda = 1$ den Werth K erlangt, wenn λ auf der reellen Achse fortgeführt wird, und die Wurzel $(\mu . \nu)$ den Hauptwerth hat. Also ist dann $\mathfrak{K} = K$. Dieselbe Schlussweise ergiebt dann, dass auch $\mathfrak{K}' = K'$ sei. Der Fall, dass K und K' gleichzeitig negativ reell wären, kann nicht vorkommen, denn aus der Gleichung (40) folgt*), dass K (weil q reell ist) positiv sein muss.

Im Allgemeinen aber, wenn K, K' nicht als reell vorausgesetzt werden, brauchen die Grössen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ mit denen K, K' nicht übereinzustimmen, was im Artikel von der Transformation (Art. 13.) weiter erörtert werden wird. Aber wir beschäftigen uns noch mit der umgekehrten Frage. Wenn ein Modul k vorgegeben ist, und wenn

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\mu\nu}, \quad iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\mu\nu}$$

---

*) Dies sieht man unmittelbar aus (40.) allerdings nur für Werthe von q ein, die nicht zu nahe an 1 liegen. Setzt man aber darin $i\vartheta'_{11} = -\vartheta . \vartheta_{01} . \vartheta_{10}$, eine Relation, die im Art. 7 unabhängig von der Differentialgleichung bewiesen wird, so folgt $2K = \pi . \vartheta^2$, und hieraus die Richtigkeit unserer Behauptung auch für Werthe von q, die beliebig nahe an 1 liegen.

ist, und die Integrationen so ausgeführt sind, wie es pag. 95 u. 96 bestimmt wurde, ob dann die Umkehrung des Integrales $u = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu}$, also ob sin am u mit der Fnnction $\lambda(u)$, wie sie aus (25.) entnommen wird, wenn dort für K, K' die hier aufgestellten Integrale eingesetzt werden, übereinstimmt. Da sie dieselben Perioden ($4K$, $2iK'$) haben, in denselben Puncten ($u = 2mK + 2niK'$) verschwinden und ($u = iK' + 2mK + 2niK'$) unendlich werden, so können sie sich (nach dem zu XXIX. gegebenen Hilfssatze) nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Da sie aber für $u = K$ übereinstimmen [$\sin\text{am}\, K = \lambda(K) = 1$], so sind sie völlig identisch. Hierbei haben wir die Annahme, die zu (25.) gemacht wurde, dass $\lambda'(0) = 1$ sei, nicht benutzt und wir können deswegen in dem hier angenommenen Falle auch $\sin\text{am}\, u = \Lambda(u)$ setzen.

Man ist also im Stande, das elliptische Integral erster Gattung mittels Θ-Functionen umzukehren, oder, mit andern Worten, die Umkehrung desselben durch Θ-Quotienten darzustellen. Da nun hierbei K sowohl als K' vorgegeben sind, so kann man die Annahme (40.) natürlich nicht machen. Allein aus der Differentialgleichung, welcher die elliptische Function sin am u genügt, folgt, dass ihr Differentialquotient für $u = 0$ den Werth 1 hat, und da sin am u mit dem Θ-Quotienten $\Lambda(u)$ für unsern Fall übereinstimmen, so ist es jetzt keine Annahme, sondern eine Folgerung, dass $\Lambda'(0) = 1$ sei. Man kann mithin den Satz aussprechen:

(42.) *Sind die Grössen K, K' als die Integrale*

$$K = \int_1^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 . 1-k^2\lambda^2}}, \quad iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 . 1-k^2\lambda^2}}$$

vorgegeben, und die Integrationen den pag. 95 und 96 getroffenen Bestimmungen gemäss ausgeführt, so ist

$$2K = -i\pi\vartheta'_{11} : \vartheta_{01} . \vartheta_{10},$$

wenn in den ϑ-Functionen $a = -\pi K' : K$ gesetzt wird.

Die unten aufgestellten Additionstheoreme gelten nun nicht blos, wenn $\lambda(u)$, $\mu(u)$, $\nu(u)$ Abkürzungen für Θ-Quotienten sind, sondern auch, wenn sie als elliptische Functionen aufgefasst werden. Hierzu eine Anwendung.

Ein Lemniscatenbogen s, der zu einem Winkel φ gehört, ist

durch die Gleichung $s = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}$ gegeben. Ein anderer σ, der zum Winkel ϑ gehört, durch die Gleichung $\sigma = \int_0^{\vartheta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}$, also ist:

$$\sin\varphi = \sin\operatorname{am} s, \quad \sin\vartheta = \sin\operatorname{am}\sigma, \quad \sin\operatorname{am}(s \pm \sigma) = \sin\chi =$$

$$\frac{\sin\operatorname{am} s . \cos\operatorname{am}\sigma\, \varDelta\operatorname{am}\sigma \pm \sin\operatorname{am}\sigma . \cos\operatorname{am} s\, \varDelta\operatorname{am} s}{1 - k^2 . \sin^2\operatorname{am} s . \sin^2\operatorname{am}\sigma}$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\vartheta\,\varDelta\vartheta \pm \sin\vartheta\cos\varphi\,\varDelta\vartheta}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}.$$

Da nun $\sin\varphi$, $\sin\vartheta$ vorgegeben sind, und $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$, $\varDelta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-2\sin^2\varphi}$, $\cos\vartheta = \sqrt{1-\sin^2\vartheta}$, $\varDelta\vartheta = \sqrt{1-2\sin^2\vartheta}$ nur Quadratwurzeln enthalten, so folgt, dass man $\sin\chi$, also χ, d. h. den zu dem Bogen $s \pm \sigma$ gehörenden Winkel mit Hilfe von Zirkel und Lineal construiren kann. Ebenso folgert man aus der Gleichung (37a.), dass man den Lemniscatenbogen mit Zirkel und Lineal halbiren könne.

Auch die Lösung der Aufgabe der conformen Abbildung eines Rechtecks auf den Kreis kann hier vervollständigt werden. Wir fanden nämlich pag. 98, dass durch die Gleichung

$$x = \sin\operatorname{am}(u, k)$$

die von der reellen Achse begrenzte Hälfte der x-Ebene auf ein Rechteck mit den Seiten K' und $2K$ conform abgebildet werde Ist nun das Verhältniss der Seiten dieses Rechtecks, also $K' : K$ gegeben, so findet man k aus der Gleichung:

$$k = \vartheta_{10}^2 : \vartheta^2 = \Theta_{10}^2 : \Theta^2,$$

womit das Problem völlig gelöst ist.*)

---

*) Der Umstand, dass wenn K, K' als reell vorausgesetzt werden, zu einem reellen Werthe von k, der kleiner als 1 ist, nur ein einziges q gehört, ist von grossem Werthe für die numerische Berechnung von q. K, K'. Ist $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $K' = K$, $q = e^{-\pi} = 0{,}043215..$, für kleinere Werthe von k ist q kleiner. Nach einer auf Seite 111 gemachten Anmerkung reicht es oft aus, q für Werthe von k zwischen 0 und 0,1715729.. zu kennen, an welcher Stelle q den Werth 0,0018... hat. Will man q sehr genau berechnen, so kann man mittels der Formel

$$\lambda^2(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1-\mu(\frac{1}{2}K)}{1+\nu(\frac{1}{2}K)} \quad \text{oder} \quad \nu(\tfrac{1}{2}K) = \sqrt{\frac{k'^2\lambda^2(\frac{1}{2}K) + 2\nu(\frac{1}{2}K) + 2\mu(\frac{1}{2}K)}{[1+\nu(\frac{1}{2}K)]^2}}$$

aus der Tabelle (39.) $\nu(\frac{1}{2}K) = \sqrt{\tau}$ berechnen. Dann ist (nach 27a.)

Die Additionstheoreme (34.), (35.), (36.) liefern, wenn (40.) erfüllt ist, die Differentialgleichungen:

$$(43.)\quad \lambda' = \mu.\nu, \quad \mu' = -\lambda.\nu, \quad \nu' = -k^2.\lambda.\mu.$$

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{k'}.\,\Theta(\tfrac{1}{4}K) : \Theta_{01}(\tfrac{1}{4}K) =$$

$$\sqrt{k'}.(1+2q\cos\tfrac{1}{4}\pi - 2\varepsilon\cos\tfrac{1}{4}\pi) : (1-2q\cos\tfrac{1}{4}\pi + 2\eta\cos\tfrac{1}{4}\pi),$$

worin ε und η kleine Grössen sind, die für $k < 0{,}1715\ldots$ höchstens auf die 23te Decimale Einfluss haben, weil in den benutzten Θ-Reihen q^4 nicht vorkommt. Hieraus ergiebt sich

$$q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{\sqrt{\tau}-\sqrt{k'}}{\sqrt{\tau}+\sqrt{k'}} + \frac{\eta\sqrt{\tau}+\varepsilon\sqrt{k'}}{\sqrt{\tau}+\sqrt{k'}}$$

und man erhält q auf mehr als 20 Stellen richtig, wenn man

$$q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{\sqrt{\tau}-\sqrt{k'}}{\sqrt{\tau}+\sqrt{k'}}$$

nimmt. Freilich ist τ ein complicirter Ausdruck. Man reicht aber mit der viel einfacheren Formel

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

aus, wenn man q in dem Intervall von 0 bis 0,17157.. auf 11 Decimalstellen, von da bis $k=\frac{1}{2}$ auf 8 Decimalstellen, von $\frac{1}{2}$ bis $\sqrt{\frac{1}{2}}$ auf 6 Decimalstellen richtig berechnen will. Die Darstellung von $\nu(0)$ durch Θ-Functionen liefert nämlich

$$1 : \sqrt{k'} = 1+2q+2q^4+2\varepsilon : 1-2q+2q^4-2\eta,$$

worin ε, η nahe die 9te Potenz von q sind. Hieraus folgt

$$\sqrt{k'}-1+2q(\sqrt{k'}+1)+2q^4(\sqrt{k'}-1)+2\eta\sqrt{k'}+2\varepsilon = 0,$$

also

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + q^4\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} - \frac{\eta+\varepsilon\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + q^4\left(2q - 2q^4\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + \frac{2(\eta+\varepsilon\sqrt{k'})}{1+\sqrt{k'}}\right) - \frac{\eta+\varepsilon\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + 2q^5 - \delta,$$

worin δ von der 8ten Potenz von q abhängt. Setzt man also

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}},$$

so macht man einen Fehler, der kleiner als $2q^5$ ist. Noch für $k^2 = \frac{3}{4}$ beträgt der Fehler weniger als 0,00001.. Sobald q gefunden ist, ergiebt sich K aus (40.) oder aus der Gleichung $K = \frac{1}{2}\pi.\vartheta^2$, K' aus der Gleichung $\pi K' = -K\lg q$. Setzt man

$$\cos u = \frac{1}{2q}.\frac{\nu-\sqrt{k'}}{\nu+\sqrt{k'}},$$

so macht man einen Fehler, der kleiner als $2q^4$ ist.

Art. 5. Darstellung der elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung durch Θ-Functionen, und ihre Additionstheoreme.

Die Eigenschaft der ϑ-Functionen, die elliptischen Integrale umzukehren, ist es vornehmlich, welche ihnen so grosse Bedeutung in der Analysis verschafft. Man kann durch sie auch die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung ausdrücken. Bei Entwicklung dieser Darstellungen treten noch viele bemerkenswerthe Eigenschaften der ϑ-Functionen hervor, weshalb sie hier nicht fehlen darf. Als Vorbereitung stellen wir die Fuuction $\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{hg}(x)}{\partial x^2}$ durch ϑ-Quotienten dar. Diese Function hat sowohl die Periode $i\pi$, als auch die Periode a, und ist demnach doppeltperiodisch d. h. es ist

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{hg}(x+mi\pi+na)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{hg}(x)}{\partial x^2}.$$

Differenziren wir den Logarithmus weg, so haben wir

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{hg}(x)}{\partial x^2}=\frac{\vartheta''_{hg}(x)\,.\,\vartheta_{hg}(x)-\vartheta'_{hg}(x)\,.\,\vartheta'_{hg}(x)}{\vartheta^2_{hg}(x)}.$$

Da nun dieser Quotient doppeltperiodisch ist, der Nenner aber den Functionalgleichungen (11.) und (12.) Genüge leistet, wenn dort $p=2$, $h=g=0$ genommen wird, so muss der Zähler ebenfalls dieser Functionalgleichung genügen und wir können daher setzen

$$\vartheta''_{hg}(x)\vartheta_{hg}(x)-\vartheta'_{hg}(x)\,.\,\vartheta'_{hg}(x)=\alpha\vartheta^2_{hg}(x)+\beta\vartheta^2_{11}(x),$$

wenn wir nur voraussetzen, dass $(h,g)\lesseqgtr(1,1)$, also $\vartheta_{hg}(x)$ eine der drei geraden ϑ-Functionen sei, deren erster Differentialquotient mit dem Argument verschwindet. Dann haben wir

für $x=0$, $\qquad \alpha=\vartheta''_{hg}:\vartheta_{hg}$,

für $x=-\frac{ha+hi\pi}{2}+\frac{a}{2}+\frac{i\pi}{2}$,

$$\beta=-\frac{\vartheta'^2_{hg}[-\frac{1}{2}(h-1)a-\frac{1}{2}(g-1)i\pi]}{\vartheta^2_{11}[-\frac{1}{2}(h-1)a-\frac{1}{2}(g-1)i\pi]}.$$

Demnach ist für $h=0$, $g=1$

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{01}(x)}{\partial x^2}=\frac{\vartheta''_{01}}{\vartheta_{01}}-\left(\frac{\vartheta'_{01}(\frac{1}{2}a)}{\vartheta_{11}(\frac{1}{2}a)}\right)^2\frac{\vartheta^2_{11}(x)}{\vartheta^2_{01}(x)},$$

und da $\vartheta'_{01}(\tfrac{1}{2}a) = -ie^{-\frac{1}{4}a}\vartheta'_{11}$, $\vartheta_{11}(\tfrac{1}{2}a) = -ie^{-\frac{1}{4}a}\vartheta_{01}$,

$$\vartheta'_{11} = -\frac{2K.\sqrt{k}}{\pi i}.\vartheta_{01}$$

(nach pag. 140) ist, so kann man schreiben

$$(44.)\quad \frac{\partial^2 \lg \vartheta_{01}(x)}{\partial x^2} = \frac{\vartheta''_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{4K^2k}{\pi^2}\cdot\frac{\vartheta^2_{11}(x)}{\vartheta^2_{01}(x)},$$

und wenn wir darin $x+\tfrac{1}{2}a$ statt x setzen,

$$(45.)\quad \frac{\partial^2 \lg \vartheta_{11}(x)}{\partial x^2} = \frac{\vartheta''_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{4K^2k}{\pi^2}\cdot\frac{\vartheta^2_{01}(x)}{\vartheta^2_{11}(x)},$$

oder wenn wir in (44.) $x+\tfrac{1}{2}i\pi$ statt x setzen

$$(46.)\quad \frac{\partial^2 \lg \vartheta(x)}{\partial x^2} = \frac{\vartheta''_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{4K^2k}{\pi^2}\cdot\frac{\vartheta^2_{10}(x)}{\vartheta^2(x)},$$

und wenn wir hierin $x+\tfrac{1}{2}a$ für x setzen

$$(47.)\quad \frac{\partial^2 \lg \vartheta_{10}(x)}{\partial x^2} = \frac{\vartheta''_{01}}{\vartheta_{01}} + \frac{4K^2k}{\pi^2}\cdot\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta^2_{10}(x)}.$$

Führen wir hier die Θ ein, so erhalten wir

$$(48.)\quad \frac{\partial^2 \lg \Theta_{01}(u)}{\partial u^2} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - k^2\lambda^2(u),$$

$$(49.)\quad \frac{\partial^2 \lg \Theta_{11}(u)}{\partial u^2} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - \frac{1}{\lambda^2(u)},$$

$$(50.)\quad \frac{\partial^2 \lg \Theta(u)}{\partial u^2} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - \frac{k^2\mu^2(u)}{\nu^2(u)} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - 1 + \frac{k'^2}{\nu^2(u)},$$

$$(51.)\quad \frac{\partial^2 \lg \Theta_{10}(u)}{\partial u^2} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - \frac{\nu^2(u)}{\mu^2(u)} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - k^2 - \frac{k'^2}{\mu^2(u)}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung die Constante $\frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - 1 = c$, $c+k'^2 = c'$ und integriren die Gleichung (50.), so folgt aus ihr:

$$(52.)\quad \frac{\partial \lg \Theta(u)}{\partial u} = cu + k'^2\int_0^u \frac{du}{\nu^2(u)} = cu + k'^2\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu^3}$$

$$= c'u + \frac{2k^2k'^2\partial}{\partial(k^2)}\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu} = c'u + 2k^2k'^2\frac{\partial u}{\partial(k^2)},$$

Setzt man hierin $2K$ für u, so muss das Integral $\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\mu.\nu}$ über eine Schlinge erstreckt werden, welche vom Puncte $\lambda = 0$, $\mu.\nu = 1$ (erster Zweigwerth von $\mu.\nu$) ausgeht, um den Punct 1 herum an die Stelle $\lambda = 0$, $\mu\nu = -1$ (zweiter Zweigwerth von $\mu.\nu$) zurückführt (man vergl. pag. 105). Die obere Grenze ist

also $\lambda = 0$ $(\mu.\nu = -1)$, der Integrationsweg ist von k unabhängig, Differentiation des Integrales ist daher Differentiation unter dem Integralzeichen und man erhält für $u = 2K$, wenn wir zur Abkürzung $\varkappa$ für k^2, $\varkappa'$ für k'^2 schreiben:

$$2c'K = -4\varkappa\varkappa'\frac{\partial K}{\partial\varkappa}, \quad c' = -\frac{2\varkappa\varkappa'}{K}\frac{\partial K}{\partial\varkappa},$$

so dass wir endlich die Gleichung erhalten

$$(52\text{a.}) \quad \frac{\partial \lg \Theta(u)}{\partial u} = 2k^2k'^2\left(\frac{\partial u}{\partial(k^2)} - u\frac{\partial \lg K}{\partial(k^2)}\right) = 2Kk^2k'^2\frac{\partial \frac{u}{K}}{\partial(k^2)},$$

Integrirt man $\int_0^\lambda \frac{dx}{\mu.\nu}$ über eine durch den Punct $\lambda = 0$ gehende Schlinge, die so gross ist, dass sie die beiden Puncte 1 und $1:k$ in seinem Innern enthält, aber -1, $-1:k$ **nicht**, so ist der Werth des Integrals $2iK'$, und der Weg von k unabhängig. Differentiation des Integrales ist demnach Differentiation unter dem Integralzeichen. Man erhält daher für $u = 2iK'$ aus (52a.) *)

$$-\frac{\pi i}{K} = 4Kk^2k'^2 \cdot \frac{\partial \frac{iK'}{K}}{\partial(k^2)}$$

$$(53.) \quad \frac{\partial a}{\partial(k^2)} = \frac{\pi^2}{4K^2k^2k'^2}. \text{**})$$

Durch Differenziren nach x $\left(x = -\frac{\pi i u}{2K}\right)$ leitet man aus (52.) ab

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\pi i}{2K}\right)^2 = \frac{2Kk^2k'^2\partial^2 \frac{u}{K}}{\partial\varkappa.\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

$$= \frac{Kk^2k'^2}{\pi i}\,\frac{\partial \frac{2\pi i}{K.\mu.\nu}}{\partial\varkappa}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2Kk^2k'^2}{\mu.\nu}\left(\frac{\mu\nu\,\partial\frac{1}{K}}{\partial\varkappa} - \frac{1}{K}\cdot\frac{\partial(\mu.\nu)}{\partial\varkappa}\right)$$

$$= -2k^2k'^2\frac{\partial \lg(K.\mu.\nu)}{\partial\varkappa}.$$

Nun ist nach (3.) pag. 128 für $x = u = 0$ $\frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial x^2} = \frac{4\partial \lg \vartheta}{\partial a}$, $\mu.\nu = 1$, und daher fliesst aus den letzten Gleichungen

*) Man kann auch, um diese Relation zu erhalten, in (52a.) u um $2iK'$ wachsen lassen und den Zuwachs der beiden Seiten dieser Gleichung vergleichen.

**) Dies ist dieselbe Gleichung als die pag. 117 erhaltene, und also ist die dortige Constante bestimmt.

$$\frac{2\partial \lg \vartheta}{\partial a}\,\frac{\partial a}{\partial (k^2)} = \frac{\partial \lg K}{\partial (k^2)} = \frac{2\partial \lg \vartheta}{\partial (k^2)} \quad \text{oder}$$

$$\vartheta = \text{Const.} \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

Für $k = 0$ ist $K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{1}{2}\pi$,

$$2iK' = \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = i\int_1^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}} = -\infty,$$

also $a = -\infty$, $\vartheta = 1$ und daher Const. $= 1$ und

(54.) $\vartheta = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, $\vartheta_{01} = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}$, $\vartheta_{10} = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}$,

(54.) $\vartheta'_{11} = i\vartheta.\vartheta_{01}.\vartheta_{10}$,

welche drei letzten Gleichungen aus (13.) pag. 133 und aus der Gleichung (40.) folgen.

Durch die Gleichung (52.) ist *ein Integral zweiter Gattung, d. h. ein Integral, welches für bestimmte Werthe der obern Grenze* (hier $+1:k$, $-1:k$) *wie eine algebraische Function unendlich gross wird* $\left(\text{hier wie } \frac{1}{\sqrt{1-k^2\lambda^2}}\right)$ *durch ϑ-Functionen ausgedrückt.*

Jacobi führt für den Ausdruck $\frac{d\lg \Theta_{01}(u)}{du}$ die Bezeichnung ein*)

(55.) $Z(u) = u\frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - k^2\int_0^\lambda \frac{\lambda^2 d\lambda}{\mu.\nu} = uc + \int_0^\lambda \frac{\nu^2 d\lambda}{\mu.\nu}$.

Das Additionstheorem dieses Integrales zweiter Gattung

(56.) $Z(u+v) = Z(u) + Z(v) - k^2\lambda(u).\lambda(v).\lambda(u+v)$

beweisen wir leicht a posteriori. Es ist

$$Z(u+v) - Z(u) - Z(v) = \frac{d\lg \Theta_{01}(u+v)}{du} - \frac{d\lg \Theta_{01}(u)}{du} - \frac{d\lg \Theta_{01}(v)}{dv}$$

in Bezug auf u und v eine doppelt periodische Function mit den Perioden $4K$ und $2iK'$, und hat mit der Function $\lambda(u).\lambda(v).\lambda(u+v)$

---

*) Für $\lambda = \sin\varphi = \sin \text{am}\, u$, $\varphi = \text{am}\, u$ erhält man in der Legendreschen Bezeichnung

$$Z(u) = cF(\varphi) + E(\varphi).$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist $\text{am}\, u = K$, $Z(K) = 0$ oder $c = -E:K$ oder

$$Z(u) = \frac{K.E(\varphi) - E.F(\varphi)}{K}.$$

die Puncte Null und Unendlich gemein und kann sich daher von ihr nach pag. 68 nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Differenzirt man nach u, so folgt aus (55.) und (56.)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[Z(u+v)-Z(u)-Z(v)\right] = -k^2[\lambda^2(u+v)-\lambda^2(u)]$$
$$= \text{Const.}\ \left[\lambda'(u)\lambda(v)\lambda(u+v)+\lambda(u)\lambda(v)\lambda'(u+v)\right],$$

woraus für $v=K$, $u=0$ folgt: $-k^2=\text{Const.}$, w. z. b. w.

Für das Integral

$$\int_0^\lambda \frac{\lambda^2.d\lambda}{\mu.\nu} = \int_0^u \lambda^2(u).du$$

erhalten wir einen Ausdruck durch Θ-Functionen, wenn wir die Gleichung (48.) integriren, nämlich

$$(57.)\qquad \int_0^u \lambda^2(u)\,du = \frac{u}{k^2}\,\frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - \frac{\partial \lg \Theta_{01}(u)}{k^2\partial u}.$$

Zu Ausdrücken der Integrale dritter Gattung durch ϑ-Functionen, d. h. der Integrale, welche wie ein Logarithmus unendlich werden, gelangt man folgendermassen.

Man dividirt die Gleichung (19.) durch $\vartheta^2_{01}(x).\vartheta^2_{01}(\xi)$, so ist

$$\vartheta^2_{01}.\frac{\vartheta_{01}(x+\xi)\,\vartheta_{01}(x-\xi)}{\vartheta^2_{01}(x)\,\vartheta^2_{01}(\xi)} = 1-\frac{\vartheta^2_{11}(x)\,\vartheta^2_{11}(\xi)}{\vartheta^2_{01}(x)\,\vartheta^2_{01}(\xi)},$$

oder

$$\frac{2Kk'}{\pi}.\frac{\Theta_{01}(u+v)\,\Theta_{01}(u-v)}{\Theta^2_{01}(u)\,\Theta^2_{01}(v)} = 1-k^2\lambda^2(u)\,\lambda^2(v),$$

woraus wir durch logarithmisches Differenziren nach v erhalten

$$\frac{\Theta'_{01}(u+v)}{\Theta_{01}(u+v)}-\frac{\Theta'_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u-v)}-\frac{2\Theta'_{01}(v)}{\Theta_{01}(v)} = -\frac{2k^2\lambda^2(u)\,\lambda(v)\,\lambda'(v)}{1-k^2\lambda^2(u)\,\lambda^2(v)}$$
$$= -\frac{2\lambda'(v)}{\lambda(v)}.\frac{1-[1-k^2\lambda^2(u)\,\lambda^2(v)]}{1-k^2\lambda^2(u).\lambda^2(v)}.$$

Integriren wir nun nach u, so erhalten wir weiter

$$\frac{\lambda'(v)}{\lambda(v)}\int_0^u \frac{du}{1-k^2\lambda^2(u)\,\lambda^2(v)} =$$
$$u\left(\frac{\lambda'(v)}{\lambda(v)}+\frac{\Theta'_{01}(v)}{\Theta_{01}(v)}\right)+\tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}\right),$$

oder in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise

$$(58.)\quad \Pi(u,v) = \int_0^u \frac{k^2\lambda(v)\,\mu(v)\,\nu(v)\,\lambda^2(u)\,.\,du}{1-k^2\lambda^2(u)\,\lambda^2(v)} =$$

$$u\,\frac{d\lg\Theta_{01}(v)}{dv} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta_{01}(u-v)}{\Theta_{01}(u+v)}.$$

Das Additionstheorem dieser Function

$$(59.)\qquad \Pi(u+t,v) =$$

$$\Pi(u,v) + \Pi(t,v) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{1+k^2\lambda(v)\lambda(u)\lambda(t)\lambda(u+v+t)}{1-k^2\lambda(v)\lambda(u)\lambda(t)\lambda(u+t-v)}$$

kann man leicht a posteriori beweisen, was dem Leser überlassen bleibt. Ebenso die Formel für die Addition des Parameters (so nennt man v),

$$(59^{a}.)\quad \Pi(u,v+w) = \Pi(u,v)+\Pi(u,w) - k^2u\,\lambda(v)\,\lambda(w)\,\lambda(v+w)$$

$$+\tfrac{1}{2}\lg\frac{1+k^2\lambda(u)\,\lambda(v)\,\lambda(w)\,\lambda(u+v+w)}{1-k^2\lambda(u)\,\lambda(v)\,\lambda(w)\,\lambda(v+w-u)}.$$

Aus der Gleichung (58.) ergiebt sich sofort die Gleichung

$$(60.)\qquad \Pi(u,v)-\Pi(v,u) = u\,Z(v) - v\,Z(u),$$

durch welche die Vertauschung von Parameter (v) und Argument (u) bewirkt wird.

Art. 6. Darstellung der ϑ-Functionen durch unendliche Producte.

Ehe noch die Darstellung der ϑ-Functionen durch unendliche Reihen bekannt war, hatten Abel und Jacobi schon die elliptischen Functionen durch unendliche Producte dargestellt, und dadurch, dass Jacobi Zähler und Nenner dieser Functionen für sich betrachtete, sind die ϑ-Functionen entstanden. Wir haben hier die Reihenform als die erste hingestellt, einmal, weil diese einer Verallgemeinerung, wie sie für die Behandlung der Abel'schen Functionen nöthig wird, leicht fähig ist, während etwas Aehnliches für die Productform bis jetzt noch nicht möglich gewesen ist. Sodann sind ja aber für alle Functionen die Darstellungen durch Reihen, wenn sie möglich sind, stets als die fundamentalen betrachtet worden. Es sollen nun aber die Productformen aus den Reihen abgeleitet werden, wozu wir uns des Satzes XXIV. bedienen.

Um diesen auf die Function $\vartheta(x)$ anzuwenden, setzen wir

$$x = i\arcsin t.$$

Es wird $\arcsin t$ unendlich gross nur für $t=\infty$, und es gehören

zu jedem Werthe von t zwei Werthreihen von x, weil $\arcsin t$ [wie $\lg(t)$] eine unendlich vieldeutige Function ist. Ist nämlich für $t = t_1$ ein Werth von $x = x_1$, so kann man, wenn man die Variabele t um die Puncte ± 1 mehrere Male herum nach t_1 zurückführt (siehe die Anmerk. zu pag. 107), dort zu den Werthen

$$x_1 + 2\pi i m, \quad (2n+1)i\pi - x_1$$

gelangen. Für alle diese Werthe nimmt aber $\vartheta(x)$ wegen (1.) einen und denselben Werth an, sie ist demnach eine einwerthige Function von t oder $\sin(-xi)$.

Allen Werthen von x, welche die Form

$$x + 2im\pi, \quad -x + (2n+1)i\pi$$

haben, entspricht umgekehrt ein einziger Werth von t.

Die Function $\vartheta(x)$ verschwindet nun nach pag. 131 (8.) für $x = \frac{2m+1}{2}a + \frac{i\pi}{2} + 2n\pi i$, und $x = \frac{2m+1}{2}a - \frac{i\pi}{2} + 2ni\pi$, und nur für diese Werthe, wenn m, n alle ganzen positiven und negativen Zahlen durchlaufen. Diese beiden Grössenreihen ordnen wir nun so an,

$$\begin{array}{ll} \frac{2m+1}{2}a + \frac{i\pi}{2} + 2ni\pi, & \frac{2m+1}{2}a - \frac{i\pi}{2} + 2ni\pi, \\ -\frac{2m+1}{2}a - \frac{i\pi}{2} + (2n+1)i\pi, & -\frac{2m+1}{2}a + \frac{i\pi}{2} + (2n+1)i\pi, \end{array}$$

für $m = 0, 1 \ldots \infty$. So gehören zur ersten Vertikalreihe die Werthe $t = \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a + \frac{\pi}{2}\right)$, zur zweiten $t = \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a - \frac{\pi}{2}\right)$, für welche $\vartheta(i \arcsin t)$ verschwindet, und zwar in der ersten Ordnung, weil $\frac{\partial \vartheta(i \arcsin t)}{\partial t}$ für alle diese Werthe von 0 und ∞ verschieden bleibt.

Da nun $\vartheta(i \arcsin t)$ für keinen endlichen Werth von t unendlich gross wird, so ist nach XXIV. im Innern eines Ebenenstückes S

$$\frac{\vartheta(i \arcsin t)}{\vartheta(0)} =$$

$$\prod_0^\infty{}_{(m)} \frac{t - \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a + \frac{1}{2}\pi\right)}{-\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a + \frac{1}{2}\pi\right)} \cdot \prod_0^\infty{}_{(m)} \frac{t - \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a - \frac{1}{2}\pi\right)}{-\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a - \frac{1}{2}\pi\right)}$$

$$= \prod_0^\infty{}_{(m)}\left[1-\frac{t}{\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a+\frac{1}{2}\pi\right)}\right]\cdot\prod_0^\infty{}_{(m)}\left[1-\frac{t}{\sin\left(\frac{2m+1}{2i}a-\frac{1}{2}\pi\right)}\right]$$

$$= \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1-\frac{t^2}{\cos^2\frac{2m+1}{2i}a}\right)$$

oder

$$(61.)\qquad \frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2 xi}{\cos^2\frac{2m+1}{2i}a}\right),$$

$$(61a.)\qquad \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2.\frac{\pi u}{2K}}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}}\right),$$

wenn noch bewiesen wird, dass das Integral

$$\int\frac{\partial\lg\vartheta(i\arcsin\tau)}{(\tau-t)\,\partial\tau}d\tau$$

über die ganze Begrenzung s von S erstreckt, Null ist.

Setzen wir in (61.) $a+\pi i$ für a, so ist nach dem pag. 129 Bemerkten

$$\vartheta(x,a+i\pi) = \vartheta(x+\tfrac{1}{2}i\pi,a) = \vartheta_{01}(x),$$

und folglich

$$(62.)\qquad \frac{\vartheta_{01}(x)}{\vartheta_{01}} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2 xi}{\sin^2\frac{2m+1}{2i}a}\right),$$

$$(62a.)\qquad \frac{\Theta_{01}(u)}{\Theta_{01}} = \prod_0^\infty{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2K}}{\sin^2\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}}\right).$$

Das Stück S wählen wir nun so, dass seine Begrenzung s vom Puncte $t=0$ überall sehr weit entfernt ist, und niemals durch einen Punct geht, in welchem die ϑ-Function Null wird. Jeden (noch so grossen) Werth von x kann man in die Form setzen $x=\xi+ha+gi\pi$, worin h, g ganze Zahlen und ξ eine Zahl ist, die einem Puncte eines Parallelogrammes mit den Ecken 0, $i\pi$, $a+i\pi$, a entspricht. Setzt man die Zahlen, welche dem Bilde der in der t-Ebene verlaufenden Curve s in der x-Ebene entsprechen, in diese Form, so kann

$$\frac{\partial\lg\vartheta(x)}{\partial x} = -2h+\frac{\partial\lg\vartheta(\xi)}{\partial\xi}$$

nur unendlich gross werden, wenn h unendlich gross wird, und

bleibt daher, mit $x = i \arcsin t$ dividirt, immer endlich, d. h. seinem absoluten Betrage nach unter einer festen Zahl, etwa M.

Schreiben wir nun

$$\int_s \frac{\partial \lg \vartheta(i \arcsin \tau)}{(\tau - t)\,\partial \tau}\,dt = \int_s \frac{\partial \lg \vartheta(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau}\,\frac{d\tau}{\tau - t}$$

$$= \int_s \frac{\partial \lg \vartheta(x)}{x.\partial x} \cdot \frac{\arcsin \tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t},$$

und beachten, dass $\arcsin \tau$ für zunehmende τ langsamer unendlich wird, als jede Potenz von τ mit noch so kleinem positiven Exponenten, so finden wir, dass der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck für zunehmende τ unendlich klein in einer um ein Angebbares höheren als der ersten Ordnung wird, nämlich immer noch in einer höheren als $\tau^{-\frac{3}{2}}$, und folglich (Ib. pag. 25) convergirt das Integral $\int_s \frac{d \lg \vartheta(i \arcsin \tau)}{(\tau - t)\,d\tau}.d\tau$ gegen Null, wenn wir s überall weiter und weiter vom Puncte $\tau = 0$ entfernt annehmen; was gefordert wurde.

Um $\vartheta_{10}(x)$ in ein unendliches Product zu verwandeln, untersuchen wir die Function $\varphi(x) = \frac{\vartheta_{10}(x)}{\cos(xi)}$, welche für endliche x nicht unendlich wird, für $x = ma \pm \frac{1}{2}i\pi + 2ni\pi$ verschwindet, wenn m nicht Null ist, und die Periode $i\pi$ besitzt. Ferner ist $\varphi(i \arcsin t)$ eine einwerthige Function von t, welche für endliche t endlich bleibt, und welche die Anwendung des Satzes XXIV. gestattet, wenn das Stück S wie vorhin gewählt wird. Daraus folgt $\frac{\varphi(x)}{\varphi(0)} =$

$$(63.)\qquad \frac{\vartheta_{10}(x)}{\cos(xi)\,\vartheta_{10}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(1 - \frac{\sin^2(xi)}{\cos^2 mai}\right)$$

oder

$$(63a.)\qquad \frac{\Theta_{10}(u)}{\Theta_{10}} = \cos\frac{\pi u}{2K} \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi u}{2K}}{\cos^2\frac{m\pi K'}{Ki}}\right).$$

Endlich ist $\psi(x) = \frac{\vartheta_{11}(x)}{\sin ix}$ eine Function, die für $x = ma + ni\pi$ verschwindet, wenn m nicht 0 ist, und auf welche, wenn $x = i \arcsin t$ gesetzt wird, der Satz XXIV. angewendet werden kann. Daraus folgt

(64.) $$\frac{\psi(x)}{\psi(0)}=\frac{\vartheta_{11}(x)}{\sin xi}\cdot\frac{i}{\vartheta'_{11}(0)}=\frac{\vartheta_{11}(x)}{\sin xi}\cdot\frac{\pi}{2K\sqrt{k}\vartheta_{01}}$$
$$=\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2 xi}{\sin^2 mai}\right)$$

oder

(64a.) $$\frac{\Theta_{11}(u)}{\Theta_{01}}=\frac{2K\sqrt{k}}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2K}\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2K}}{\sin^2\frac{m\pi K'}{iK}}\right).$$

Ersetzt man $\sin \mu ai$ durch $\frac{q^{-\mu}-q^{+\mu}}{2i}$, $\cos \mu ai$ durch $\frac{q^{\mu}+q^{-\mu}}{2}$, so lassen sich die Producte leicht in die Formen bringen, welche von Jacobi herrühren:

(61b.) $$\frac{\Theta(u)}{\Theta}=\prod_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1+2q^{2n+1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{2(2n+1)}}{(1+q^{2n+1})^2},$$

(62b. $$\frac{\Theta_{01}(u)}{\Theta_{01}}=\prod_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{2(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

(63b.) $$\frac{\Theta_{10}(u)}{\Theta_{10}}=\cos\frac{\pi u}{2K}\prod_{1}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2},$$

(64b.) $$\frac{\Theta'_{11}(u)}{\Theta_{01}}=\frac{2K}{\pi}\sqrt{k}\sin\frac{\pi u}{2K}\prod_{1}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Für $u=K$ folgt aus (61b.)
$$\sqrt[4]{k'}=\prod_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}.$$

Art. 7. Darstellung der Constanten ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ'_{11} durch unendliche Producte.

Die aufgestellten Formeln liefern die Darstellungen der ϑ-Functionen durch unendliche Producte nicht vollständig, indem diese Producte fürs erste noch mit den Constanten ϑ, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ'_{11} zu multipliciren sind, welche bis jetzt nur durch Reihen dargestellt sind. Mittels der Gleichung (3.), welche für Constantenbestimmungen überhaupt von Wichtigkeit ist, gelingt es leicht auch diese Constanten durch Producte darzustellen, ohne dass

man dazu, wie Jacobi (Fundamenta nova pag. 178) besonderer Kunstgriffe nöthig hätte.

Wir wenden die Differentialgleichung (3.) $\frac{\partial^2 \vartheta(x)}{\partial x^2} = \frac{4\partial \vartheta(x)}{\partial a}$ auf die rechte Seite der Gleichung

$$\vartheta(x) = \vartheta . \prod_0^\infty{}_{(m)} \left(1 - \frac{\sin^2 xi}{\cos^2 \frac{2m+1}{2i} a}\right)$$

an und setzen nach der Differentiation $x = 0$, für welchen Werth $\frac{\partial^2 \vartheta(x)}{\partial x^2}$ mit ϑ'' bezeichnet wird. So ist zunächst

$$\vartheta'(x) = \vartheta(x) . \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{-2i \sin xi \cos xi}{\cos^2 \frac{2m+1}{2i} a - \sin^2 xi},$$

also weiter

$$\vartheta'' = \vartheta . \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{2}{\cos^2 \frac{2m+1}{2i} a}$$

$$= 2\vartheta \sum_0^\infty{}_{(m)} \left(\frac{\partial \frac{e^{(2m+1)a}}{1+e^{(2m+1)a}}}{\partial a} . \frac{4}{2m+1} \right) = 4 \frac{\partial \vartheta}{\partial a},$$

oder wenn man mit 4ϑ dividirt

$$d \lg \vartheta = 2d \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{e^{(2m+1)a}}{1+e^{(2m+1)a}} . \frac{1}{2m+1},$$

$$\lg \vartheta = A + 2 \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{e^{(2m+1)a}}{1+e^{(2m+1)a}} . \frac{1}{2m+1},$$

worin A von a unabhängig ist. Für $a = -\infty$ ist $\vartheta = 1$, die Summe der rechten Seite 0, und folglich $A = 0$.

Schreiben wir nun

$$2 \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{e^{(2m+1)a}}{2m+1} . \frac{1}{1+e^{(2m+1)a}} = 2 \sum_0^\infty{}_{(m)} \sum_0^\infty{}_{(n)} \frac{e^{(2m+1)a}}{2m+1} (-1)^n e^{(2m+1)na}$$

und, indem wir die Reihenfolge der Summationen vertauschen, hierfür

$$2 \sum_0^\infty{}_{(n)} (-1)^n \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{(e^{(n+1)a})^{2m+1}}{2m+1} = \sum_0^\infty{}_{(n)} (-1)^{n+1} \lg \frac{1-e^{(n+1)a}}{1+e^{(n+1)a}},$$

so erhalten wir, indem wir noch $n+1$ durch n ersetzen, also eine um Eins verschobene Zählung einführen:

$$\lg \vartheta = \sum_1^\infty{}_{(n)} (-1)^n \lg \frac{1-e^{an}}{1+e^{an}} = \sum_1^\infty{}_{(m)} \left(\lg \frac{1-e^{2am}}{1+e^{2am}} + \lg \frac{1+e^{(2m-1)a}}{1-e^{(2m-1)a}} \right)$$

$$(65.)\quad \vartheta = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-e^{2am}}{1+e^{2am}} \cdot \frac{1+e^{(2m+1)a}}{1-e^{(2m-1)a}}$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}} \cdot \frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} (1+q^{2m-1})^2 (1-q^{2m})$$

$$= \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

und wenn wir $a + i\pi$ für a setzen

$$(66.)\quad \vartheta_{01} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-e^{ma}}{1+e^{ma}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-q^m}{1+q^m}$$

$$= \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} (1-q^{2m-1})^2 (1-q^{2m}) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

Ein ganz gleiches Verfahren lässt sich auf die Function $\vartheta_{10}(x)$ anwenden, welches die Gleichungen liefert

$$(67.)\quad \vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q} \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1-q^{4(m-1)}}{1-q^{2(2m-1)}} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$$

und muss nur in geringer Weise modificirt werden, damit es auch auf

$$\vartheta_{11}(x) = \vartheta'_{11} \cdot \frac{\sin xi}{i} \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \left(1 - \frac{\sin^2 xi}{\sin^2 mai}\right)$$

anwendbar sei. Wollte man nämlich die rechte Seite in die Gleichung (3.) einsetzen, und dann $x = 0$ setzen, so würde man $0 = 0$ erhalten.*) Man muss deshalb, ehe man $x = 0$ setzt, mit $\sin xi$ dividiren und nachher $x = 0$ setzen. Das weitere Verfahren ist ganz das frühere und liefert

$$(68.)\quad -i\vartheta'_{11} = 2\sqrt[4]{q} \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} (1-q^{2m})^3 = \sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3},$$

so dass nun alle Constanten durch Producte dargestellt sind.

Bilden wir das Product

$$\vartheta \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q} \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(1-q^{2(2m-1)})^2 \cdot (1-q^{2m})^2 \cdot (1-q^{4m})}{1-q^{2(2m-1)}}$$

$$= 2\sqrt[4]{q} \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} (1-q^{2(2n-1)}) \cdot (1-q^{4m}) \cdot (1-q^{2m})^2$$

---

*) Der Irrthum, welcher sich bei Jacobi (Fundam. nova pag. 185, Gleich. 5) eingeschlichen hat, ist auch in Briot und Bouquet übergegangen No. 152 Gleich. 15.

$$= 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}(1-q^{2m})^3,$$

woraus nach (68.) fliesst

$$i.\vartheta.\vartheta_{01}.\vartheta_{10} = \vartheta'_{11},$$

welche Gleichung wir schon pag. 148 Gl. 54 aufgestellt haben. Die dort angewendete Methode hat den Vorzug der Verallgemeinerung für hyperelliptische Functionen fähig*) zu sein, die hier gegebene den Vorzug, dass sie nur Mittel erfordert, welche die fundamentalen Eigenschaften der ϑ-Functionen selbst bieten, während dort die elliptischen Integrale zu Hilfe genommen wurden.

Art. 8. Darstellung der Θ-Functionen durch zweifach unendliche Producte.

Die Gleichung (61a.) kann in eine andre Form gebracht werden, indem man schreibt

$$(69.)\quad \frac{\Theta(u)}{\Theta} = \prod_{0}^{\infty}{}_{(m)}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2K}}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}}\right)$$

$$= \prod_{0}^{\infty}{}_{(m)}\left(\frac{\cos^2\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}-\sin^2\frac{\pi u}{2K}}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}}\right)$$

$$= \prod_{0}^{\infty}{}_{(m)}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi u}{2K}+\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}\right).\cos\left(\frac{\pi u}{2K}-\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}\right)}{\cos^2\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}}\right)$$

$$= \lim_{n\,\cdot\,\infty}\prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi u}{2K}-\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}\right)}{\cos\frac{(2m+1)\pi K'}{2iK}}\right).$$

Man darf hierin nicht sofort das Product über alle m von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen, sondern muss den Ausdruck als den Grenzwerth der hier aufgestellten $2n$ Factoren ansehen, weil das Product nicht unbedingt convergent ist, d. h. eine willkürliche Anordnung der Factoren nicht zulässt. Im letzten Product convergiren die Factoren für wachsende m nicht gegen 1, so dass es

*) Crelle's Journal Band 71 pag. 201 et seqq. Gleich. 14. In einem Aufsatze, der demnächst in Crelle's Journal Band 75 über diesen Gegenstand erscheinen wird, wende ich noch eine andere Methode an.

eben nicht als unendliches Product, sondern als ein Grenzwerth aufgefasst werden muss. Mit Hilfe der Gleichung (A) pag. 55, $i(2m+1)K'$ für h setzend, erhalten wir hieraus

(70.)

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta} = \lim_{n,\,n'=\infty} \prod_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')} \prod_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \left(1 - \frac{u}{(2m+1)K + i(2m'+1)K'}\right).$$

Um diesen Grenzwerth in ein unbedingt convergentes Product zu verwandeln, benutzen wir die Eisenstein'sche Methode (siehe pag. 70). Wir multipliciren das allgemeine Glied des Productes (70.) mit

$$e^{\frac{u}{(2m+1)K+(2m'+1)iK'} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{[(2m+1)K+(2m'+1)iK']^2}},$$

dann ist der Logarithmus des allgemeinen Gliedes (wenn

$$u_{m,\,m'} = (2m+1)K + (2m'+1)iK'$$

zur Abkürzung gesetzt wird):

$$\lg\left[\left(1 - \frac{u}{u_{m,\,m'}}\right) e^{\frac{u}{u_{m,\,m'}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{u^2_{m,\,m'}}}\right] = -\frac{1}{3}\,\frac{u^3(1+\varepsilon)}{u^3_{m,\,m'}},$$

worin ε eine ihrem absoluten Betrage nach kleine Zahl bedeutet, wenn $\frac{x}{u_{m,\,m'}}$ dem absoluten Betrage nach unter 1 liegt. Man sieht nun leicht ein (was das Kriterium der Convergenz ist, siehe pag. 70), dass $m^{1+\sigma}.m'^{1+\tau}.\frac{u^3(1+\varepsilon)}{u^3_{m,\,m'}}$ — so lange die positiven Grössen σ, τ unter der Einheit liegen, und K und iK' in einem complexen Verhältnisse zu einander stehen — mit zunehmenden in beliebigem Verhältnisse stehenden m, m' gegen Null convergirt, so dass das Product

$$(71.)\quad \prod_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \prod_{-\infty}^{\infty}{}_{(m')} \left[\left(1 - \frac{u}{u_{m,\,m'}}\right) e^{\frac{u}{u_{m,\,m'}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{u^2_{m,\,m'}}}\right] = s_2(u)$$

ein unbedingt convergentes ist. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von der Function $\frac{\Theta(u)}{\Theta}$ durch den Factor

$$f = \lim_{n,\,n'=\infty} e^{\sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')} \sum_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \left[\frac{u}{u_{m,\,m'}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{u^2_{m,\,m'}}\right]}.$$

In der Summe $\sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')} \sum_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \frac{u}{u_{m,\,m'}}$ muss die Summation über m

zuerst ausgeführt werden. Es ist nach pag. 56

$$\lim_{n=\infty} \sum_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \frac{u}{u_{m,m'}} = -\frac{u\pi}{2K} \frac{\operatorname{tg} \pi (2m'+1) iK'}{2K}$$

und bildet man nun die Summe für alle m', so hebt sich der Term m' gegen den Term $-m'-1$ fort, und die Summe hat daher den Werth Null, so dass der Factor f von der Form $e^{\frac{1}{2}u^2M}$ ist, und M den Werth $\sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(m')} \sum_{-n-1}^{n}{}_{(m)} \frac{1}{u^2_{m,m'}}$ hat. Um die Constante M zu bestimmen, entwickeln wir $\lg s_2(u)$ nach Potenzen von u, so beginnt die Entwicklung mit der dritten oder einer höheren Potenz*) von u, weil wir ja in (71.) die einzelnen Factoren so eingerichtet haben, dass in ihrer Entwicklung die erste und die zweite Potenz fortfallen. Nun ist aber

$$\lg \Theta(u) - \lg \Theta = \lg \left[s_2(u) . e^{-\frac{1}{2}u^2M}\right] = -\tfrac{1}{2}u^2M + \lg s_2(u)$$

und da nach (52.) pag. 146 für $u = 0$ die Gleichung stattfindet

$$\frac{\partial^2 \lg \Theta(u)}{\partial u^2} = c' = -\frac{kk'^2}{K} \frac{\partial K}{\partial k} = \frac{\Theta''}{\Theta},$$

so ergiebt sich $M = \frac{kk'^2}{K} \frac{\partial K}{\partial k}$, und endlich

(72.)

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} . e^{-\frac{u^2kk'^2}{2K} \cdot \frac{\partial K}{\partial k}} \prod_{-\infty}^{\infty}{}^{(2)}_{(m,m')} \left(1 - \frac{u}{u_{m,m'}}\right) e^{\frac{u}{u_{m,m'}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^2_{m,m'}}\right)}$$

$$u_{m,m'} = (2m+1)K + (2m'+1)iK',$$

womit nun $\Theta(u)$ als unbedingt convergentes zweifach unendliches Product dargestellt ist.

Nun sei zur Abkürzung $\alpha_{m,n} = \frac{1}{2mK + (2n+1)iK'}$, $\beta_{m,n} = \frac{1}{(2m+1)K + 2niK'}$, $\gamma_{m,n} = \frac{1}{2mK + 2niK'}$, so ist nach demselben Princip:

$$(73.) \quad s_3(u) = \prod_{-\infty}^{\infty}{}_{(m,n)} (1 - u\alpha_{m,n}) e^{u\alpha_{m,n} + \frac{1}{2}u^2\alpha^2_{m,n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2k'K}} e^{\frac{u^2kk'}{2K} \frac{\partial (Kk')}{\partial k}} . \Theta_{01}(u),$$

*) Da die Function gerade ist, so beginnt die Entwicklung erst mit der vierten Potenz von u.

$$(74.)\quad (s_1 u) = \prod_{-\infty}^{\infty}{}_{(m,n)}(1 - u\beta_{m,n})\, e^{u\beta_{m,n} + \frac{1}{2}u^2\beta^2_{m,n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2kK}}\, e^{\frac{u^2k'^2}{2K}\frac{\partial(Kk)}{\partial k}} \,.\, \Theta_{10}(u),$$

$$(75.)\quad \sigma(u) = u\,.\prod_{-\infty}^{\infty}{}_{(m,n)}(1 - u\gamma_{m,n})\, e^{u\gamma_{m,n} + \frac{1}{2}u^2\gamma^2_{m,n}}. \text{*)}$$

Im letzten Producte ist die Combination $m = 0$, $n = 0$ nicht als einen Factor bildend zuzulassen. Die Function $\sigma(u)$ lässt sich nach Herrn Weierstrass in eine Potenzreihe entwickeln, deren Coefficienten ganze Functionen von k^2 sind. Wir begnügen uns auf diese Eigenschaft aufmerksam gemacht zu haben, weil die Entwicklung complicirt ist, und die Coefficienten wenig übersichtlich sind.

Bei Bestimmung der Grösse M fanden wir

$$\Theta'' = -\Theta\,.\,\frac{kk'^2}{K}\,\frac{\partial K}{\partial k},$$

man findet in ähnlicher Weise Θ''_{01}, Θ''_{10}, und zwar ist

$$(76.)\quad \Theta'' = -\frac{\sqrt{2}\,kk'^2}{\sqrt{K\pi}}\cdot\frac{\partial K}{\partial k},\quad \Theta''_{01} = -\frac{\sqrt{2}\,kk'^2}{\sqrt{\pi K k'}}\,\frac{d(Kk')}{dk},$$

$$\Theta''_{10} = -\frac{\sqrt{2}\,kk'^2}{\sqrt{\pi K k}}\,\frac{d(Kk)}{\partial k},$$

und

$$(77.)\quad \frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} - k^2 = \frac{\Theta''_{10}}{\Theta_{10}} + 1 - k^2.$$

Art. 9. Partialbrüche.

Führt man für x die Variabele t durch die Gleichung $x = i \arcsin t$ in $\dfrac{1}{\vartheta_{h\,g}(x)}$ ein, so lässt sich mit Hilfe des Satzes XXIII. pag. 51 die Function $\dfrac{1}{\vartheta_{h\,g}(i \arcsin t)}$ in eine Partialbruchreihe verwandeln, welche unbedingt convergent ist, und dann durch Auflösung der Function $\dfrac{1}{\cos(t-\tau)}$ in Partialbrüche in eine zwei-

---

*) $\lim\limits_{u=0} \dfrac{1}{\lambda^2(u)} - \dfrac{1}{u^2} = \lim\limits_{m',n'=\infty} \sum\limits_{-m'}^{m'}\sum\limits_{-n'}^{n'} \dfrac{1}{2mK+2inK'} - \dfrac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}} = \frac{1}{3}(1+k^2)$, $(m', n') \gtrless (0,0)$.

fach unendliche Partialbruchreihe, welche nur mit vorgegebener Anordnung der Glieder gegen einen festen Werth convergirt, (aber mit den Eisenstein'schen Mitteln leicht in eine unbedingt convergente Partialbruchreihe verwandelt werden kann). Wir wollen indessen hier den umgekehrten Weg einschlagen, und zuerst die zweifach unendliche Partialbruchreihe herleiten, weil wir so nebenbei zu den Partialbruchentwickelungen für $\frac{1}{\sin t}$, $\frac{1}{\cos t}$ gelangen.

Die Function $\frac{1}{\vartheta_{11}(x)}$ wird für $x = ma + ni\pi = x_{m,n}$ unendlich gross in der ersten Ordnung, und es ist, $x - x_{m,n} = x'$ gesetzt,

$$\lim_{x = x_{m,n}} \frac{x - x_{m,n}}{\vartheta_{11}(x)} = \lim_{x' = 0} \frac{x'}{\vartheta_{11}(x' + ni\pi + ma)}$$
$$= \lim_{x' = 0} \frac{(-1)^{m+n} . x'}{e^{-am^2 - 2mx} . \vartheta_{11}(x')} = \frac{(-1)^{m+n} . q^{m^2}}{\vartheta'_{11}},$$

und mithin nach XXIII.

$$\frac{1}{\vartheta_{11}(x)} = \frac{1}{\vartheta'_{11}(0)} . \sum_{(m,n)} \frac{(-1)^{m+n} . q^{m^2}}{x - am - ni\pi},$$

wenn die Summation über alle ganzen Zahlen m und n ausgedehnt wird, für welche $x_{m,n}$ im Innern eines Stückes S (in der x-Ebene) liegt, welches die Eigenschaft besitzt, dass das über die ganze Begrenzung s von S genommene Integral

$$\int_s \frac{d\xi}{(\xi - x)\vartheta_{11}(\xi)} = \int_s \frac{d\xi}{\xi \vartheta_{11}(\xi)} + x \int_s \frac{d\xi}{\xi(\xi - x)\vartheta_{11}(\xi)}$$

verschwindet. Das Integral $\int_s \frac{d\xi}{\xi(\xi - x)\vartheta_{11}(\xi)}$ convergirt nun immer gegen Null, wenn die Begrenzung s durch keinen Punct geht, für welchen $\vartheta_{11}(x)$ verschwindet, und überall weiter und weiter von dem Puncte $x = 0$ entfernt wird, weil dann die zu integrirende Function mit zunehmendem ξ überall mindestens unendlich klein zweiter Ordnung wird. Nehmen wir nun für S eine Figur, die zwischen den Puncten der x-Ebene $\frac{1}{2}(2m' + 1)a + \frac{1}{2}(2n' + 1)i\pi$ und $\frac{1}{2}(2m' + 1)a - \frac{1}{2}(2n' + 1)i\pi$ durch eine beliebige, keinen Punct $x_{m,n}$ treffende Curve, zwischen $\frac{1}{2}(2m' + 1)a - \frac{1}{2}(2n' + 1)i\pi$ und $-\frac{1}{2}(2m' + 1)a - \frac{1}{2}(2n' + 1)i\pi$ durch eine Gerade, zwischen $-\frac{1}{2}(2m' + 1)a - \frac{1}{2}(2n' + 1)i\pi$ und

$-\frac{1}{2}(2m'+1)a+\frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ durch eine beliebige, keinen Punct $x_{m,n}$ treffende Curve zwischen $-\frac{1}{2}(2m'+1)a+\frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ und $\frac{1}{2}(2m'+1)a+\frac{1}{2}(2n'+1)i\pi$ durch eine Gerade begrenzt wird, so sind die für das Verschwinden des letzten Integrales nöthigen Bedingungen erfüllt, wenn m', n' über alle Grenzen wachsen. Denn das Integral $\int_s \frac{d\xi}{\xi.\vartheta_{11}(\xi)}$ zerfällt in die beiden geradlinigen, und in die beiden über die beliebig gelassenen Curven. Auf den letzteren wächst der reelle Theil von ξ mit wachsendem m' über alle Grenzen, und es wird daher auf ihnen $\frac{1}{\vartheta_{11}(\xi)}$ [wegen der Functionalgleichung (2.)] unendlich klein in unbegrenzt hoher Ordnung. Die von diesen Curven herrührenden Bestandtheile convergiren deshalb gegen Null. Auf den beiden geradlinigen Strecken giebt es zu jedem Puncte ξ auf der einen, einen Punct $-\xi$ auf der andern, und die beiden zu ihnen gehörenden Integrationselemente

$$\frac{d\xi}{\xi\vartheta_{11}(\xi)} \text{ und } \frac{d(-\xi)}{(-\xi).\vartheta_{11}(-\xi)} = -\frac{d\xi}{\xi\vartheta_{11}(\xi)}$$

sind einander entgegengesetzt gleich, deshalb heben sich die von den beiden geradlinigen Strecken herrührenden Bestandtheile des Integrales $\int_s \frac{d\xi}{\xi\vartheta_{11}(\xi)}$ gegenseitig auf. Demnach convergirt auch das Integral

$$\int_s \frac{d\xi}{(\xi-x)\vartheta_{11}(\xi)}$$

mit wachsenden m', n' gegen Null, und es ist folglich

$$(78.)\quad \frac{\vartheta'_{11}}{\vartheta_{11}(x)} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \lim_{n'=\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^{m+n}.q^{m^2}}{x-am-ni\pi},$$

woraus für $a=-\infty$, also $q=0$ sich ergiebt

$$(79^a.)\quad \frac{2}{e^x-e^{-x}} = \frac{1}{i\sin(-xi)} = \lim_{n'=\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{x-ni\pi}$$

oder wenn man x durch it ersetzt,

$$(79.)\quad \frac{1}{\sin t} = \lim_{n'=\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{t-n\pi} = \frac{1}{t} + 2t\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{t^2-n^2\pi^2}$$

und wenn man t durch $t-\frac{1}{2}\pi$ ersetzt,

(80.)

$$\frac{1}{\cos t} = -\lim_{n'-\infty} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^n}{t-\frac{1}{2}(2n+1)\pi} = \pi \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-1)^n(2n+1)}{\frac{1}{4}(2n+1)^2\pi^2-t^2}.$$

Wenden wir nun die Gleichung (79a.) auf die Gleichung (78.) an, so folgt

$$(81^{a.})\qquad \frac{\vartheta'_{11}}{\vartheta_{11}(x)} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{i\sin(am-x)i},$$

$$(81.)\qquad \frac{1}{\Theta_{11}(u)} = \sqrt{\frac{\pi^3}{8kk'K^3}} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\sin\left(\frac{\pi u}{2K} - \frac{m\pi i K'}{2K}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^3}{8K^3kk'}}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}} + 4\sin\frac{\pi x}{2K}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m.q^{m^2}.\cos\frac{m\pi i K'}{K}}{\cos\frac{2m\pi i K'}{K} - \cos\frac{\pi u}{K}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^3}{8K^3kk'}}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}} + 4\sin\frac{\pi u}{2K}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2+m}(1+q^{2m})}{1-2q^{2m}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4m}}\right),$$

welche Reihen unbedingt convergent sind. Ersetzt man x durch $x+\frac{1}{2}i\pi$ oder u durch $u+K$ in ihnen, so folgt

$$(82^{a.})\qquad \frac{\vartheta'_{11}}{\vartheta_{10}(x)} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{i\cos(mai-xi)},$$

$$(82.)\qquad \frac{1}{\Theta_{10}(u)}\cdot\sqrt{\frac{8K^3kk'}{\pi^3}} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\cos\left(\frac{\pi u}{2K} - \frac{m\pi i K'}{K}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}} + 4\cos\frac{\pi u}{2K}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{m(m+1)}.(1+q^{2m})}{1+2q^{2m}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4m}}.$$

Um die Function $\frac{1}{\vartheta(x)}$ durch eine Partialbruchreihe darzustellen, ist es jedoch bequemer, durch die Gleichung $x = i\arcsin t$ die Variabele t einzuführen. Da nämlich mit zunehmendem t stets der imaginäre Theil von $\arcsin t$, also der reelle Theil von $i\arcsin t$ unendlich gross wird, so convergirt das Integral

$$\int \frac{d\tau}{(\tau-t)\,\vartheta(i\arcsin\tau)} \text{ gegen } 0,$$

wenn es in der τ-Ebene über eine von der Stelle $\tau=0$ überall sehr weit entfernte Curve genommen wird, welche keinen Punct trifft, für welchen $\vartheta(i\arcsin\tau)$ verschwindet, weil die zu integrirende Function [wegen der Functionalgleichung (2.)] für wachsende

τ unendlich klein in unbegrenzt hoher Ordnung wird. Da nun $\vartheta(i \arcsin t)$ für $t = \sin\left(\frac{2m+1}{2i}a \pm \frac{\pi}{2}\right) = t_m$ verschwindet, und wenn m alle Zahlen von 0 bis ∞ durchläuft, nur für diese Werthe verschwindet, da ferner $t - t_m = t'$ gesetzt

$$\lim_{t=t_m} \frac{t-t_m}{\vartheta(i \operatorname{asc} \sin t)} = \lim_{t'=0} \frac{t'}{\vartheta(i \arcsin[t'+t_m])}$$

$$= \frac{\sqrt{1-t_m^2}}{i\vartheta'(i \arcsin t_m)} = \frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2i}a \pm \frac{\pi}{2}\right)}{i\vartheta'[\frac{1}{2}(2m+1)a \pm \frac{1}{2}i\pi]}$$

$$= \mp \frac{q^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m . 2i . \sqrt[4]{q} . \vartheta'_{11}}$$

ist, so folgt aus XXIII.

$$(83.) \quad \frac{1}{\vartheta(i \arcsin t)} =$$

$$\sum_0^\infty {}_{(m)} \frac{q^{m^2}.(1-q^{2m+1})}{(-1)^m . 2i . \sqrt[4]{q} . \vartheta'_{11}} \left(\frac{1}{t+\cos\frac{2m+1}{2i}a} - \frac{1}{t-\cos\frac{2m+1}{2i}a}\right)$$

und also

$$(84.) \quad \frac{1}{\vartheta(x)} = \sum_0^\infty {}_{(m)} \frac{iq^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m . \sqrt[4]{q} . \vartheta'_{11}} \frac{\cos\frac{2m+1}{2i}a}{\sin^2 xi - \cos^2\frac{2m+1}{2i}a},$$

(85.)

$$\frac{1}{\Theta(u)} = \sqrt{\frac{\pi^3}{8kk'K^3}} \sum_0^\infty {}_{(m)} \frac{q^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m \sqrt{q}} \cdot \frac{2\cos\frac{i(2m+1)\pi K'}{2K}}{\cos\frac{i(2m+1)\pi K'}{K} + \cos\frac{\pi u}{K}};$$

(86.)

$$\sqrt{\frac{8K^3kk'}{\pi^3}} \cdot \frac{1}{\Theta(u)} = \sum_0^\infty {}_{(m)} \frac{2q^{m^2}(1-q^{2(2m+1)})\, q^{\frac{2m+1}{2}}}{(-1)^m \sqrt[4]{q}(1+2q^{2m+1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{2(2m+1)})}.$$

Setzen wir hierin $x + \frac{1}{2}i\pi$ für x und $u + K$ für u, so erhalten wir

$$(87a.) \quad \frac{1}{\vartheta_{01}(x)} = \sum_0^\infty {}_{(m)} \frac{iq^{m^2}(1-q^{2m+1})}{(-1)^m \sqrt[4]{q} . \vartheta'_{11}} \cdot \frac{\cos\frac{2m+1}{2i}a}{\cos^2 xi - \cos^2\frac{2m+1}{2i}a};$$

$$(87.) \quad \sqrt{\frac{8K^3kk'}{\pi^3}} \frac{1}{\Theta_{01}(u)} = \sum_0^\infty {}_{(m)} \frac{(-1)^m . 2\sqrt[4]{q} . q^{m^2+m} . (1-q^{2(2m+1)})}{1-2q^{2m+1} . \cos\frac{\pi u}{K} + q^{2(2m+1)}}.$$

Um die Functionen $\frac{d \lg \vartheta(x)}{dx}$, $\frac{d \lg \Theta(u)}{du}$ durch Partialbrüche darzustellen, braucht man nur die Producte für $\vartheta(x)$, $\Theta(u)$ logarithmisch zu differenziren, so erhält man diese Darstellungen. Wir beschränken uns auf die Functionen $\Theta(u)$, $\Theta_{01}(u)$, $\Theta_{10}(u)$ $\Theta_{11}(u)$.

Aus (70.) folgt

$$(88\text{a.})\quad \frac{d \lg \Theta(u)}{du} = \lim_{n', m' = \infty} \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{u-(2m+1)K-(2n+1)iK'},$$

und aus (61b.) folgt

$$(88.)\quad \frac{d \lg \Theta(u)}{du} = \frac{-2\pi}{K} \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{q^{2n+1} . \sin \frac{\pi u}{K}}{1+2q^{2n+1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2(2n+1)}}.$$

Aus (73.) folgt

$$(89\text{a.})\quad \frac{d \lg \Theta_{01}(u)}{du} = \lim \sum_{-n'-1}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'-1}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{u-2mK-(2n+1)iK'},$$

oder aus (62b.)

$$(89.)\quad \frac{d \lg \Theta_{01}(u)}{du} = \frac{2\pi}{K} \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{q^{2n+1} . \sin \frac{\pi u}{K}}{1-2q^{2n+1} . \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2(2n+1)}}.$$

Aus (74.) und (63b.) folgen die Gleichungen

$$(90\text{a.})\quad \frac{d \lg \Theta_{10}(u)}{du} = \lim \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'-1}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{u-(2m+1)K-2niK'},$$

$$(90.)\quad \frac{d \lg \Theta_{10}(u)}{du} = \frac{-\pi}{2K} \operatorname{tg} \frac{\pi u}{2K} - \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{q^{2n} . \sin \frac{\pi u}{K}}{1+2q^{2n} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4n}}.$$

Aus (75.) endlich und (64b.) folgen die Gleichungen

$$(91\text{a.})\quad \frac{d \lg \Theta_{11}(u)}{du} = \lim \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{u-2mK-2niK'},$$

$$(91.)\quad \frac{d \lg \Theta_{11}(u)}{du} = \frac{\pi}{2K} \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} \frac{q^{2n} . \sin \frac{\pi u}{K}}{1-2q^{2n} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4n}}.$$

Setzen wir in der Gleichung (90a.) $K' = \infty$, also $q = 0$, so folgt die schon pag. 56 gefundene Gleichung

$$(92.)\qquad \frac{-\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} = \lim \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{u-(2m+1)K}$$

$$= 2u \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1}{u^2-(2m+1)^2K^2}.$$

Setzen wir in der Gleichung (91a.) $K' = \infty$, so folgt

$$(93.)\qquad \frac{\pi}{2K}\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2K} = \lim \sum_{-m'}^{m'}{}_{(m)} \frac{1}{u-2mK},$$

welche Formeln im Folgenden von Nutzen sind.

Mit denselben Mitteln als die reciproken Werthe der ϑ-Functionen lassen sich Quotienten zweier ϑ-Functionen in Partialbrüche entwickeln. Die Function $\lambda(u)$ ist ungerade und sie wird für $u = u_{m,n} = 2mK + (2n+1)iK'$ unendlich gross erster Ordnung. Das Integral

$$\int_s \frac{\lambda(v)\,dv}{v-u} = \int_s \frac{\lambda(v)\,dv}{v} + u\int_s \frac{\lambda(v)\,dv}{v(v-u)}$$

convergirt gegen Null, wenn s die ganze Begrenzung eines geradlinigen Parallelogrammes ist, dessen Ecken $2m'K + K + 2n'iK'$, $-2m'K - K + 2n'iK'$, $-2m'K - K - 2n'iK'$, $2m'K + K - 2n'iK'$ sind, wenn m', n' über alle Grenzen gross genommen werden. Denn da $\lambda(v)$ auf diesen Linien nirgend unendlich wird, so convergirt das letzte Integral mit zunehmenden m', n' gegen Null, weil die zu integrirende Function unendlich klein zweiter Ordnung wird. Das Integral $\int_s \frac{\lambda(v)\,dv}{v}$ ist genau gleich Null, weil zu jedem Elemente $\frac{\lambda(v)\,dv}{v}$ auf s ein Element $\frac{\lambda(-v).d(-v)}{-v} = -\frac{\lambda(v)\,dv}{v}$ auf s zugestellt werden kann, welche sich zusammen aufheben. Da nun weiter, $u - u_{m,n} = u'$ gesetzt,

$$\lim_{u=u_{m,n}} \lambda(u)(u-u_{m,n}) = \lim_{u'=0} u'.\lambda(u'+iK'+2mK+2niK')$$

$$= (-1)^m \lim_{u'=0} u'.\lambda(u'+iK') = (-1)^m \lim \frac{u'}{k\lambda(u')}\,{}^{*)} = \frac{(-1)^m}{k}$$

ist, so fliesst aus Satz XXIII. die Gleichung

---

*) $\lambda(u+iK') = \frac{\Theta_{11}(u+iK')}{\Theta_{01}(u+iK')\sqrt{k}} = \frac{\Theta_{01}(u)}{\Theta_{11}(u)\sqrt{k}} = \frac{1}{k} : \frac{\Theta_{11}(u)}{\Theta_{01}(u)\sqrt{k}} = \frac{1}{k\lambda(u)}.$

$$(94a.)\quad \lambda(u) = \lim_{m',\,n'=\infty} \frac{1}{k} \sum_{-n'-1}^{n'}{}^{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}^{(m)} \frac{(-1)^m}{u-2mK-i(2n+1)K'}$$

und mit Hilfe der Gleichung (79.) hieraus

$$(94.)\quad \lambda(u) = \frac{\pi}{2Kk} \sum_{-n'-1}^{n'}{}^{(n)} \frac{1}{\sin\frac{\pi u-(2n+1)\pi iK'}{2K}}$$

$$= \frac{2\pi}{kK} \sin\frac{\pi u}{2K} \sum_{0}^{\infty}{}^{(n)} \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi iK'}{2K}}{\cos\frac{(2n+1)\pi iK'}{K}-\cos\frac{\pi u}{K}}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{q}}{kK} \sin\frac{\pi u}{2K} \sum_{0}^{\infty}{}^{(n)} \frac{q^n(1+q^{2n+1})}{1-2q^{2n+1}.\cos\frac{\pi u}{K}+q^{2(2n+1)}}.$$

Ganz ähnlich lassen sich die ungeraden Functionen $\mu(u-K)$ und $\nu(u+iK')$ behandeln, und zwar erhält man so die Gleichungen

$$(95.)\quad \mu(u-K) = \frac{1}{ki}.\lim \sum_{-n'-1}^{n'}{}^{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}^{(m)} \frac{(-1)^{m+n}}{u-(2m+1)K-2(n+1)iK'},$$

$$(96.)\quad \nu(u+iK') = -i\lim \sum_{-n'}^{n'}{}^{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}^{(m)} \frac{(-1)^n}{u-2mK-2niK'}.$$

Ersetzt man in (95.) $u-K$, so folgt

$$(97a.)\quad \mu(u) = -\lim \sum_{-n'-1}^{n'}{}^{(n)} \sum_{-m'-1}^{m'}{}^{(m)} \frac{(-1)^{m+n}}{u-2mK-(2n+1)iK'},$$

und hieraus mit Hilfe von (79.)

$$(97.)\quad \mu(u) = -\frac{\pi i}{2kK} \lim \sum_{-n'-1}^{n'}{}^{(n)} \frac{(-1)^n}{\sin\frac{\pi u-(2n+1)\pi iK'}{2K}}$$

$$= \frac{2\pi}{ikK} \cos\frac{\pi u}{2K} \sum_{0}^{\infty}{}^{(n)} \frac{(-1)^n \sin\frac{(2n+1)\pi iK'}{2K}}{\cos\frac{(2n+1)\pi iK'}{K}-\cos\frac{\pi u}{K}}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{q}}{k.K} \cos\frac{\pi u}{2K} \sum_{0}^{\infty}{}^{(n)} \frac{(-1)^n q^n(1-q^{2n+1})}{1-2q^{2n+1}.\cos\frac{\pi u}{K}+q^{2(2n+1)}}.$$

Ersetzt man in (96.) $u+iK'$ durch u, so folgt

$$(98a.)\quad \nu(u) = i\lim \sum_{-n'}^{n'}{}^{(n)} \sum_{-m'}^{m'}{}^{(m)} \frac{(-1)^n}{u-2mK-i(2n+1)K'}$$

und mit Hilfe der Formel (93.) folgt hieraus

$$(98.\qquad \nu(u) = \frac{\pi}{2iK} \lim \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} (-1)^n \operatorname{cotg} \frac{\pi u - (2n+1)\pi i K'}{2K}.$$

In dieser Formel convergirt das allgemeine Glied mit wachsendem n gegen $\pm i$. Setzt man darin $u = 0$, so ist

$$\nu(0) = 1 = \frac{\pi i}{2K} \lim \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} (-1)^n \operatorname{cotg} \frac{(2n+1)\pi i K'}{2K},$$

und ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung (98.) ab, so erhalten wir

$$(99\text{a.})\qquad 1 - \nu(u) = \frac{\pi i}{2K} \sum_{-n'}^{n'}{}_{(n)} \frac{(-1)^n . \sin \frac{\pi u}{2K}}{\sin \frac{(2n+1)\pi i K'}{K} . \sin \frac{\pi u - (2n+1)\pi i K'}{K}},$$

worin das unendlich ferne Glied gegen 0 convergirt, so dass man eine endliche Anzahl unendlich ferner Glieder fortlassen kann. Zieht man nun das Glied $-n-1$ und n zusammen, so folgt hieraus mit Fortlassung eines einzelnen unendlich fernen Gliedes

$$(99\text{b.})\qquad 1 - \nu(u) = \frac{2\pi i}{K} \sin^2 \frac{\pi u}{2K} \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-1)^n \operatorname{cotg} \frac{(2n+1)\pi i K'}{2K}}{\cos \frac{(2n+1)\pi i K'}{K} - \cos \frac{\pi u}{K}}$$

und hieraus endlich die Jacobi'sche Formel (Fundamenta nova pag. 87)

$$(99.)\ 1 - \nu(u) = \frac{4\pi}{K} \sin^2 \frac{\pi u}{2K} \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-1)^n q^{2n+1} \frac{1 + q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}}{1 - 2q^{2n+1} . \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2(2n+1)}}.$$

Es lassen sich nun zwar von den vier ϑ-Functionen je zwei noch auf andere Weise zu einem Quotienten zusammensetzen, und diese in Partialbruchreihen entwickeln, allein wir begnügen uns mit den hier aufgestellten, welche die wichtigsten sind.

Art. 10. Darstellungen durch die Fourier'sche Reihe.

Um die Function $\lg \Theta_{01}(u)$ in trigonometrische Reihen zu entwickeln, bedienen wir uns der Formel (62b.) und erhalten aus ihr

$$\lg \Theta_{01}(u) =$$

$$\lg \Theta_{01} - 2 \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)} (1 - q^{2n-1}) + \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \lg (1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{2(2n+1)})$$

$$= \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)}(1-q^{2n}) + \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}[\lg(1-q^{2n+1}e^{\frac{i\pi u}{K}}) + \lg(1-q^{2n+1}e^{\frac{-\pi i u}{K}})]$$

und wenn man nach aufsteigenden Potenzen von $e^{\frac{i\pi u}{K}}$ und $e^{\frac{-i\pi u}{K}}$ entwickelt, was für alle reelle Werthe von $\frac{u}{K}$ möglich ist,

$$\lg \Theta_{01}(u) = \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)}(1-q^{2n}) - 2\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{1}{m} \cdot q^{(2n+1)m} . \cos\frac{m\pi u}{K} .$$

Da für alle Werthe von $\frac{u}{K}$ diese Reihen unbedingt convergent sind, so können wir die Reihenfolge der beiden Summationen umkehren und die Summation über n ausführen, dann erhalten wir

(100.) $$\lg \Theta_{01}(u) = \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(u)}(1-q^{2n}) - 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^m . \cos\frac{m\pi u}{K}}{m(1-q^{2m})},$$

und wenn wir u um K vermehren, erhalten wir

(101.) $$\lg \Theta(u) = \lg \prod_{1}^{\infty}{}_{(n)}(1-q^{2n}) - 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m . q^m . \cos\frac{m\pi u}{K}}{m(1-q^{2m})},$$

und wenn wir diese Formeln differenziren

(102.) $$\frac{d \lg \Theta_{01}(u)}{du} = \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^m \sin\frac{m\pi u}{K}}{1-q^{2m}} = Z(u),$$

(103.) $$\frac{d \lg \Theta(u)}{du} = \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^m \sin\frac{m\pi u}{K}}{1-q^{2m}} .$$

Mit denselben Mitteln finden wir

(104.) $$\lg \Theta_{10}(u) = \lg [2\sqrt[4]{q} \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}(1-q^{2m})] + \lg\cos\frac{\pi u}{2K} - 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{2m} . \cos\frac{m\pi u}{K}}{m(1-q^{2m})},$$

(105.) $$\lg \Theta_{11}(u) = \lg\left[\sqrt[4]{q}\,\frac{4K}{\pi}\sqrt{k} \prod_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(1-q^{2m-1})^2}{1-q^{2m}}\right] + \lg\sin\frac{\pi u}{2K} - 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{2m}\cos\frac{m\pi u}{K}}{m(1-q^{2m})}$$

und hieraus durch Differenziren

(106.) $$\frac{d \lg \Theta_{10}(u)}{du} = -\frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{2m} \sin\frac{m\pi u}{K}}{1-q^{2m}},$$

$$(107.)\quad \frac{d \lg \Theta_{11}(u)}{du} = \frac{\pi}{2K} \operatorname{cotg} \frac{\pi u}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{2m} \sin \frac{m\pi u}{K}}{1-q^{2m}}.$$

Zieht man die Gleichung (100.) von der (105.) ab, so erhält man

$$(108.)\quad \lg \lambda(u) = \lg \left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} . \sin \frac{\pi u}{2K} \right) + 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^m \cos \frac{m\pi u}{K}}{m(1+q^m)}.$$

Die Grössen $\lg \sin \frac{\pi u}{2K}$, $\lg \cos \frac{\pi u}{2K}$ lassen sich auch noch in trigonometrische Reihen entwickeln, wodurch die Darstellung von $\lg \Theta_{10}(u)$ und $\lg \Theta_{11}(u)$ erst vollständig wird, diese Entwicklung hat jedoch für uns kein besonderes Interesse.

Die elliptischen Functionen und die reciproken Werthe der Θ-Functionen lassen sich dadurch in trigonometrische Reihen entwickeln, dass man jedes einzelne Glied ihrer Darstellungen durch die Fourier'sche Reihe darstellt. Setzen wir für das allgemeine Glied der Partialbruchreihe den Werth, welchen uns die Gleichung liefert,

$$\frac{\sin \frac{\pi u}{2K} . q^n(1+q^{2n+1})}{1-2q^{2n+1} \cos \frac{2\pi u}{K} + q^{2(2n+1)}} = \frac{q^n}{2i} \left(\frac{e^{\frac{\pi i u}{2K}}}{1-q^{2n+1} e^{\frac{\pi i u}{K}}} - \frac{e^{\frac{-\pi i u}{2K}}}{1-q^{2n+1} e^{\frac{-\pi i u}{K}}} \right)$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} q^{2nm+m+n} . \sin \frac{(2m+1)\pi u}{2K},$$

in die Gleichung (94.) ein, so erhalten wir

$$\lambda(u) = \frac{2\pi\sqrt{q}}{Kk} \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} q^{2nm+m+n} . \sin \frac{(2m+1)\pi u}{2K}.$$

In dieser Reihe, welche unbedingt convergent ist, so lange $\frac{u}{K}$ reell ist, können wir die Reihenfolge der Summationen umkehren, und die Summation über n ausführen. Da $\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} q^m . q^{(2m+1)n} = \frac{q^m}{1-q^{2m+1}}$ ist, so folgt

$$(109.\quad \lambda(u) = \frac{2\pi\sqrt{q}}{Kk} \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^m . \sin \frac{(2m+1)\pi u}{2K}}{1-q^{2m+1}},$$

und ähnlich

$$(110.)\qquad \mu(u) = \frac{2\pi\sqrt{q}}{Kk}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m.\cos\frac{(2m+1)u}{2K}}{1+q^{2m+1}},$$

$$(111.)\qquad \nu(u) = \frac{\pi}{2K}\left(1+4\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m.\cos\frac{m\pi u}{K}}{1+q^{2m}}\right).$$

Setzt man in das allgemeine Glied der Partialbruchreihe (87.) den Werth ein, welchen die Gleichung liefert

$$\frac{1-q^{2(2m+1)}}{1-2q^{2m+1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{2(2m+1)}}$$

$$= -1+\frac{1}{1-q^{2m+1}e^{\frac{\pi ui}{K}}}+\frac{1}{1-q^{2m+1}e^{\frac{-\pi iu}{K}}}$$

$$= 1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}q^{(2m+1)n}.\cos\frac{n\pi u}{K},$$

so findet man

$$(112.)\qquad \sqrt{\frac{2kk'K^3}{\pi^3\sqrt{q}}}\cdot\frac{1}{\Theta_{01}(u)} =$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}(-1)^m q^{m^2+m}\left(1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}q^{n(2m+1)}.\cos\frac{\pi nu}{K}\right),$$

und wenn wir u um K vermehren

$$(113.)\qquad \sqrt{\frac{2kk'K^3}{\pi^3\sqrt{q}}}\cdot\frac{1}{\Theta(u)} =$$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}(-1)^m q^{m^2+m}\left(1+2\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}(-1)^n q^{n(2m+1)}.\cos\frac{\pi nu}{K}\right).$$

So lange der Werth von $\frac{u}{K}$ reell ist, sind diese Reihen unbedingt convergent, und man kann die Reihenfolge der Summationen vertauschen, wodurch sie in Fourier'sche Reihen verwandelt werden. Die Coefficienten lassen sich nach XIX. durch bestimmte Integrale darstellen.

Durch ähnliche Methoden kann man auch die Quadrate der elliptischen Functionen in Fouier'sche Reihen entwickeln. Jacobi giebt die Formeln (Fundamenta nova pag. 110 und 113.)

$$(114.)\qquad \lambda^2(u) = \frac{1}{k^2}-\frac{E}{k^2K}-\frac{2\pi^2}{k^2K^2}\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}\frac{n.q^n.\cos\frac{n\pi u}{K}}{1-q^{2n}},$$

$$(115.)\quad \frac{1}{\lambda^2(u)} = 1-\frac{E}{K}+\frac{\pi^2}{4K^2\sin^2\frac{\pi u}{2K}}-\frac{2\pi^2}{K^2}\sum_1^{\infty}{}_{(n)}\frac{nq^{2n}\cos\frac{n\pi u}{K}}{1-q^{2n}},$$

$$(116.)\quad \frac{1}{\mu^2(u)} = 1-\frac{E}{k'^2K}+\frac{\pi^2}{4k^2K^2\cos\frac{\pi u}{2K}}-\frac{2\pi^2}{k'^2K^2}\sum_1^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n nq^{2n}\cos\frac{n\pi u}{K}}{1-q^{2n}},$$

$$(117.)\quad \frac{1}{\nu^2(u)} = \frac{E}{k'^2K^2}+\frac{2\pi^2}{k'^2K^2}\sum_1^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n nq^n\cos\frac{n\pi u}{K}}{1-q^{2n}}.$$

worin, wie schon früher

$$E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \int_0^K \nu^2(u)\,du$$

zu setzen ist.

Aus den Productentwickelungen

$$(118.)\quad \frac{1-\lambda(u)}{\mu(u)} = \sqrt{\frac{1-\lambda(u)}{1+\lambda(u)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\sin\frac{\pi u}{2K}}{1+\sin\frac{\pi u}{2K}}}\cdot\prod_1^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-2q^n\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2n}}{1+2q^n\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2n}},$$

$$(119.)\quad \frac{1-k\lambda(u)}{\nu(u)} = \sqrt{\frac{1-k\lambda(u)}{1+k\lambda(u)}}$$

$$= \sqrt{k'}\prod_0^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-2\sqrt{q^{2n+1}}\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{2n+1}}{1+2\sqrt{q^{2n+1}}\sin\frac{\pi u}{2K}+q^{1n+1}}$$

findet man

$$(120.)\quad \lg\sqrt{\frac{1+\lambda(u)}{1-\lambda(u)}} =$$

$$\lg\sqrt{\frac{1+\sin\frac{\pi u}{2K}}{1-\sin\frac{\pi u}{2K}}}+4\sum_0^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n q^{2n+1}.\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi u}{K}}{(2n+1)(1-q^{2n+1})},$$

$$(121.)\quad \lg\sqrt{\frac{1-k\lambda(u)}{1+k\lambda(u)}} = 4\sum_0^{\infty}{}_{(n)}\frac{(-1)^n\sqrt{q^{2n+1}}.\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi u}{K}}{(2n+1)(1-q^{2n+1})}.$$

Art. 11. Die verschiedenen Darstellungen der constanten ϑ-Functionen.

Es soll nun hier eine Zusammenstellung der verschiedenen Darstellungen der in der Theorie der ϑ-Functionen vorkommenden wichtigsten Constanten gegeben werden. Aus den Gleichungen (54.), (65.), (66.), (67.), (68.) folgen die Relationen

(122.)
$$\vartheta = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2\sum_1^\infty{}_{(m)} q^{m^2} = \prod_1^\infty{}_{(m)} (1+q^{2m-1})^2(1-q^{2m});$$

(123.) $$\vartheta_{01} = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1+2\sum_1^\infty{}_{(m)}(-1)^m q^{m^2}$$
$$= \prod_1^\infty{}_{(n)} \frac{1-q^n}{1+q^n} = \prod_1^\infty{}_{(m)}(1-q^{2m-1})^2(1-q^{2m});$$

(124.) $$\vartheta_{10} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q}\sum_0^\infty{}_{(m)} q^{m(m+1)}$$
$$= 2\sqrt[4]{q}\prod_1^\infty{}_{(m)}\frac{1-q^{4m}}{1-q^{2(2m-1)}};$$

(125.) $$-i\vartheta'_{11} = \sqrt{\frac{8kk'K^3}{\pi^3}} = 2\sqrt[4]{q}\sum_0^\infty{}_{(m)}(2m+1)(-1)^m q^{m(m+1)}$$
$$= 2\sqrt[4]{q}\prod_1^\infty{}_{(m)}(1-q^{2m})^3.$$

Setzen wir in den Formeln (82.), (86.), (87.), u gleich Null, so folgt

(126.) $$\frac{2K}{\pi}\sqrt{k'} = 1+4\sum_1^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m.\,q^{m(m+1)}}{1+q^{2m}} = 2\vartheta.\vartheta_{01},$$

(127.) $$\frac{K}{\pi}\sqrt{kk'} = \sqrt[4]{q}\sum_0^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^{m(m+1)}.\,(1-q^{2m+1})}{1+q^{2m+1}} = \vartheta_{01}.\vartheta_{10},$$

(128.) $$\frac{K}{\pi}\sqrt{k} = \sqrt[4]{q}\sum_0^\infty{}_{(m)}\frac{(-1)^m.\,q^{m(m+1)}(1+q^{2m+1})}{1-q^{2m+1}}\,{}^{*)} = \vartheta.\vartheta_{10}.$$

Dividiren wir die Gleichungen (94.) und (109.) durch u und setzen dann $u=0$, so erhalten wir

---

*) Die Formel (13.) in Jacobi's Fundamenta nova pag. 187 ist demnach nicht richtig, denn setzt man dort $\sqrt{q}$ für q, wodurch kK in $2\sqrt{k}.K$ übergeht, so erhält man eine mit (128.) in Widerspruch stehende Formel.

$$(129.)\qquad \frac{kK^2}{\pi^2} = \sqrt{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m.(1+q^{2m+1})}{(1-q^{2m+1})^2}$$
$$= \sqrt{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(2m+1)q^m}{1-q^{2m+1}}.$$

Setzen wir in (97.) und (110.) $u=0$, so erhalten wir

$$(130.)\quad \frac{Kk}{2\pi} = \sqrt{q}.\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m+1}} = \sqrt{q}.\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m}{1+q^{2m+1}}.$$

Setzt man in (99.) $u=K$ und in (111.) $u=0$, so erhält man

$$(131.)\qquad \frac{K(1-k')}{4\pi} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^{2m+1}}{1-q^{2(2m+1)}},$$

(132.)
$$\frac{2K}{\pi} = 1+4\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}\frac{q^m}{1+q^{2m}} = 1+4\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}(-1)^n q^{m(2n+1)}$$

und nach (122.) ist dies

$$= \vartheta^2 = (1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}q^{m^2})\,(1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}q^{n^2}).$$

Multiplicirt man dies Product aus, so erhält man eine Potenzreihe, welche nach q fortschreitet, und deren Exponenten alle die Zahlen sind, welche als Summe zweier Quadrate darstellbar sind. Betrachten wir hiervon nur die ungeraden Zahlen und vergleichen die Reihe mit der Doppelsumme, welche ebenfalls eine Potenzreihe von q ist, und in welcher offenbar von den ungeraden Zahlen nur die von der Form $4n+1$ vorkommen, die von der Form $4n+3$ aber nicht, so erhält man den zahlentheoretischen Satz:

(133.) *Jede Primzahl von der Form* $4n+1$ *ist als Summe zweier Quadrate darstellbar, jede Zahl von der Form* $4n+3$ *aber ist nicht darstellbar.*

Dividiren wir die Gleichung (99.) durch u^2 und setzen dann $u=0$, so folgt

$$(134.)\qquad \frac{k^2K^3}{2\pi^3} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m.q^{2m+1}.(1+q^{2m+1})}{(1-q^{2m+1})^3}.$$

Differenzirt man (97.) und (110.) nach u und setzt nachher $u=K$, so erhält man

$$(135.)\qquad \frac{K^2kk'}{\pi^2} = \sqrt{q}.\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m q^m(1-q^{2m+1})}{(1+q^{2m+1})^2}$$
$$= \sqrt{q}\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)}\frac{(-1)^m.q^m.(2m+1)}{1+q^{2m+1}}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich $\frac{1}{4}\vartheta_{01}^2 . \vartheta_{10}^2$ und gehet daher in $\frac{1}{4}i\vartheta^2 . \vartheta_{10}^2$ über, wenn man q in $-q$ (a in $a+i\pi$) verwandelt, so dass man die Gleichung (129.) durch diese Verwandlung erhält.

Setzt man in (94.) $u = \frac{1}{2}iK'$, so erhält man

$$(136.)\quad \frac{K\sqrt{k}}{\pi} = \sqrt{q}:(q^{-\frac{1}{4}} - q^{\frac{1}{4}}) \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{q^m(1+q^{2m+1})}{1-q^{2m+1}(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})+q^{2(2m+1)}}$$

$$= (q^{-\frac{1}{4}} - q^{\frac{1}{4}}) . \sum_0^\infty{}_{(m)} \frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)} + q^{-\frac{1}{2}(2m+1)}}{q^{\frac{1}{2}(2m+1)} + q^{-\frac{1}{2}(2m+1)} - (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})}.$$

Entwickelt man mit den früher angegebenen Mitteln $\frac{1}{\nu(u)}$ nach der Fourier'schen Reihe, so findet man

$$(137.)\quad \frac{1}{\nu(u)} = \frac{\pi}{2k'K}\left(1 + 4\sum_1^\infty{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^m}{1+q^{2m}} \cos\frac{m\pi u}{K}\right),$$

woraus für $u = 0$ folgt

$$(138.)\quad \frac{2Kk'}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^m}{1+q^{2m}} = 2\vartheta_{01} . \vartheta_{01} .$$

Differenzirt man (108.) zweimal und setzt dann $u = K$, so ergiebt sich

$$(139.)\quad \frac{4k'^2K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^m . m}{1+q^m} = \vartheta_{01}^4,$$

setzt man darin $-q$ an Stelle von q ($a+i\pi$ an Stelle von a), so ergiebt sich

$$(140.)\quad \frac{4K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_{(m)} \frac{m . q^m}{1+(-q)^m} = \vartheta^4 =$$

$$1 + 8\sum_0^\infty{}^{(2)}_{(m,n)} (2m+1) q^{(2m+1)(n+1)} + 8\sum_0^\infty{}^{(2)}_{(m,n)} (-1)^n (2m+2) q^{(2m+2)(n+1)}$$

$$= (1 + 2\sum_0^\infty{}_{(m)} q^{m^2})^4.$$

Ist nun p eine ungerade Zahl und $\varphi(p)$ die Summe ihrer Theiler, so kann man den vorletzten Ausdruck schreiben

$$1 + 8\sum \varphi(p)(q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + 3q^{16p} + \ldots) = (1 + 2\sum_1^\infty{}_{(m)} q^{m^2})^4.$$

In der Potenzreihe links kommen nun offenbar alle Zahlen als Exponenten vor, in der rechts aber, wenn man die Reihenmultiplication ausführt, diejenigen, welche als Summe von vier Quadraten

darstellbar sind. Damit beweist Jacobi den Fermat'schen zahlentheoretischen Satz:

(141.) *Jede Zahl ist als Summe von vier Quadraten darstellbar.*

Schreiben wir in (108.) K für u erhalten wir

$$(142.)\qquad \lg k = \lg(4\sqrt{q}) + 4\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m . q^m}{m(1+q^m)},$$

setzen wir in (108.) $\frac{1}{2}K$ für u, so erhalten wir

$$(143.)\qquad \lg\frac{k}{1+k'} = \lg(2\sqrt{q}) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{2m}}{m(1+q^{2m})}$$

und setzen wir in (108.) $\frac{1}{2}iK'$ für u, so erhalten wir

$$0 = \lg(1-\sqrt{q}) + \sqrt{q}\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^m(1+\frac{1}{q})}{m(1+q^m)}.$$

Entwickeln wir die Logarithmen der Producte (65.), (66.), (67.) in Reihen, so erhalten wir

$$(144.)\qquad \lg\frac{2K}{\pi} = 4\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{2m+1}}{(2m+1)(1+q^{2m+1})},$$

$$\lg\frac{2Kk'}{\pi} = -4\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{2m+1}}{(2m+1)(1-q^{2m+1})},$$

$$\lg\frac{Kk}{2\pi} = \lg(\sqrt{q}) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{2m}}{m(1+q^{2m})}.$$

Zieht man die beiden ersten dieser Gleichungen von einander ab, so folgt

$$(145.)\qquad \lg k' = -8\sum_{0}^{\infty}{}_{(m)} \frac{q^{2m+1}}{(2m+1)(1-q^{2(2m+1)})}.$$

Dividiren wir die Gleichungen (102.), (103.), (106.) durch u und setzen dann $u=0$, so erhalten wir

$$(146.)\qquad \frac{\Theta''_{01}}{\Theta_{01}}\frac{K^2}{2\pi^2} = -\frac{kk'^2K^2}{4\pi^3}\frac{d(Kk')}{dk} = \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{m q^m}{1-q^{2m}},$$

$$(147.)\qquad \frac{kk'^2K^2}{\pi^3}\cdot\frac{dK}{dk} = -\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^m m}{1-q^{2m}},$$

$$(148.)\qquad \frac{kk'^2K^2 d(Kk)}{\pi^3 . dk} = +\frac{1}{8} - \sum_{1}^{\infty}{}_{(m)} \frac{(-1)^m q^{2m} . m}{1-q^{2m}}.$$

Aus der Darstellung elliptischer Functionen durch Producte ergeben sich die Gleichungen:

$$(149.)\qquad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}\,.\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right),$$

$$(150.)\qquad \frac{\sqrt{k}K}{\pi} = \sqrt[4]{q}\,.\prod_{1}^{\infty}{}_{(m)}\left(\frac{1-q^{2m}}{1-q^{2m-1}}\right)^2.$$

Man sieht, wie manigfaltig die Darstellungen der in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommenden Constanten sind. Von den Relationen, welche durch Vergleichung der verschiedenen Darstellungen erhalten werden, können viele auch mit den Mitteln bewiesen werden, mit welchen im folgenden Artikel die verallgemeinerte binomische Reihe behandelt wird.

Art. 12. Die verallgemeinerte binomische Reihe.

Eine hervorragende Rolle spielen die ϑ-Functionen in einer gewissen Gattung von Differenzengleichungen, nämlich solcher, in welchen

$$\varDelta\varphi(x) = \varphi(qx) - \varphi(x), \quad \varDelta^n\varphi(x) = \varDelta^{n-1}\varphi(qx) - \varDelta^{n-1}\varphi(x)$$

ist. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit linearen Coefficienten, welche (im Allgemeinen) auf die Form

$$(151.)\qquad (1-x)\,\varDelta\varphi(x) + x\,(q^\alpha - 1)\,\varphi(x) = 0$$

gebracht werden kann, und deren Lösung die verallgemeinerte binomische Reihe ist, durch welche die Mittel, die ϑ-Functionen darzustellen, noch vermehrt werden.

Integriren wir nämlich die Gleichung (151.) mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten, indem wir die nach um eine Einheit steigenden oder fallenden Potenzen geordnete Reihe $\Sigma a_n x^n$ in die Gleichung (151.) einsetzen, so erhalten wir die Gleichung

$$(152.)\qquad \Sigma a_n[(1-x)\,x^n(q^n - 1) + x^{n+1}(q^\alpha - 1)] =$$
$$\Sigma a_n[x^n(q^n - 1) + x^{n+1}(q^\alpha - q^n)] = 0.$$

Im Falle die Reihe aufsteigt, wird jeder Coefficient a_{n+1} mit dem vorhergehenden a_n durch die Gleichung

$$(153.)\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^\alpha - q^n}{1 - q^{n+1}}$$

in eine Beziehung gesetzt, abgesehen vom niedrigsten. Der Coefficient der niedrigsten Potenz in (152.) muss demnach für sich verschwinden, was nur durch passende Bestimmung des Exponenten der niedrigsten Potenz erreicht werden kann. Ist dieser Exponent

μ, so hat man $a_\mu(q^\mu - 1) = 0$, also $\mu = 0$ zu setzen, wenn man von einem ganzen Multiplum von $\frac{2\pi i}{\lg q}$ absieht, welches nichts wesentlich Neues liefert. Denn lässt man die Entwicklung mit $x^{m\frac{2\pi i}{\lg q} + \mu}$ statt mit x^μ beginnen, so erhält jedes Glied der Reihe, also ihre Summe den Factor $x^{m\frac{2\pi i}{\lg q}}$ d. h. eine Function, welche der Differenzengleichung

$$(154.)\qquad \Delta\varphi(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(qx) = \varphi(x)$$

Genüge leistet. Jede Lösung der Gleichung (151.) kann aber mit einer (154.) genügenden (also in einer besondern Art periodischen) Function, welche wir eine k-Function nennen wollen, multiplicirt werden, ohne dass sie aufhört eine Lösung von (151.) zu sein, weil die linke Seite der Differenzengleichung eine lineare homogene Function von $\varphi(x)$ und $\varphi(qx)$ ist. Man kann aber umgekehrt behaupten, die Gleichung (151.) besitzt nur ein einziges Integral (Lösung), welches noch mit einer willkürlichen k-Function als Factor versehen werden kann. Sind nämlich $\psi(x)$ und $\chi(x)$ zwei verschiedene Lösungon der Gleichung (151.), welcher man die Form

$$(155.)\qquad \varphi(qx) = \frac{1 - q^\alpha x}{1 - x}\varphi(x)$$

geben kann, so setzen wir $\psi(x)$ und $\chi(x)$ in (151.) ein und bilden durch Division der beiden so erhaltenen Gleichungen die neue

$$\frac{\psi(xq)}{\chi(xq)} = \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \quad \text{oder} \quad \Delta\frac{\psi(x)}{\chi(x)} = 0.$$

Es ist also dieser Quotient eine k-Function, w. z. b. w.

Die Gleichung (153.) liefert man für a_n den Werth

$$a_n = a_0\frac{q^\alpha - 1}{1 - q}\cdot\frac{q^\alpha - q}{1 - q^2}\cdots\frac{q^\alpha - q^{n-1}}{1 - q^n}$$

und es ergiebt sich als erste Lösung der Gleichung (151.), $a_0 = 1$ gesetzt, die Reihe

$$(156.)\quad p(\alpha, q, x) = 1 + \frac{q^\alpha - 1}{1 - q}x + \frac{q^\alpha - 1}{1 - q}\cdot\frac{q^\alpha - q}{1 - q^2}x^2 + \ldots$$

welche für $q = 1$ in die binomische Reihe, deren Summe $(1 - x)^\alpha$ ist, übergeht. Für die Bezeichnung $p(\alpha, q, x)$ soll $p(\alpha, x)$ gesetzt werden, wo es ohne Zweideutigkeit geschehen kann.

Integrirt man die Gleichung (151.) durch eine absteigende Reihe, so muss, damit (152.) erfüllt sei, für die höchste Potenz von x die α^{te} genommen werden und die Coefficienten müssen wieder der Relation (153.) genügen, woraus als zweites Integral der Gleichung (151.) die Reihe

(157.)

$$\pi(\alpha, q, x) = e^{-\alpha i\pi}.x^{\alpha}.\sum_0^{\infty}{}_{(n)}\left(\frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right)^n.\frac{q^{\alpha}-1}{1-q}.\frac{q^{\alpha}-q}{1-q^2}\cdots\frac{q^{\alpha}-q^{n-1}}{1-q^n},$$

in welcher Summe für $n = 0$ der Term 1 zu setzen ist, und $e^{-\alpha i\pi}$ als Factor zugefügt ist, damit für $q = 1$ die Entwicklung mit der von $(1-x)^{\alpha} = e^{-\alpha i\pi}x^{\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$ nach absteigenden Potenzen von x übereinstimme, wenn auf dem positiven Ufer der reellen Achse, durch welche wir die x-Ebene gemäss XXXI. begrenzt denken, die mehrdeutige Function $(1-x)^{\alpha}$ für $x = 0$ den Werth 1, $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$, für $x = \infty$ den Werth 1 und x^{α} für $x = 1$ den Werth 1 hat. Auch in der Bezeichnung $\pi(\alpha, q, x)$ kann das Element q fortgelassen werden, wenn keine Zweideutigkeit entsteht.

Man stellt die Functionen $p(\alpha, x)$ und $\pi(\alpha, x)$ leicht durch unendliche Producte dar. Denn da nach (151.)

$$p(\alpha, qx) = \frac{1-q^{\alpha}x}{1-x}p(\alpha, x), \text{ also}$$

$$p(q^n x) = \frac{1-q^{\alpha}x}{1-x}.\frac{1-q^{\alpha+1}x}{1-qx}\cdots\frac{1-q^{\alpha+n-1}x}{1-q^{n-1}x}.p(\alpha, x) \text{ ist,}$$

und da, wenn $n = \infty$ gesetzt wird und der absolute Betrag von q kleiner als 1 ist, $\lim p(q^n x)$ nach (156.) gleich 1, und da auch $\lim\limits_{n=\infty}(1-q^n x)^{\alpha} = 1$ ist, so ist

(158.)

$$p(\alpha, x) = \lim_{n=\infty}\frac{1-x}{1-q^{\alpha}x}.\frac{1-qx}{1-q^{\alpha+1}x}\cdots\frac{1-q^{n-1}x}{1-q^{n+\alpha-1}x}.(1-q^n x)^{\alpha},$$

worin der Factor $(1-q^n x)^{\alpha}$ für abs $(q) < 1$ fortgelassen werden kann. Will man aber die Function auch für andere Werthe von q brauchbar machen, so muss dieser Factor hinzugefügt werden. Aehnlich haben wir

$$\pi\left(\alpha, \frac{x}{q}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}q}{1-\frac{1}{x}q^{1-\alpha}} . \pi(\alpha, x),$$

$$\pi\left(\alpha, \frac{x}{q^n}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}q}{1-\frac{1}{x}q^{1-\alpha}} . \frac{1-\frac{1}{x}q^2}{1-\frac{1}{x}q^{2-\alpha}} \cdots \frac{1-\frac{1}{x}q^n}{1-\frac{1}{x}q^{n-\alpha}} \pi(\alpha, x),$$

und aus (157.) folgt $\lim\limits_{n-\infty} \pi\left(\alpha, \frac{x}{q^n}\right) = e^{-\alpha i\pi} . x^{\alpha}$, so dass man erhält

$$(159.) \quad \pi(\alpha, x) =$$

$$\lim_{n=\infty} e^{-\alpha i\pi} . x^{\alpha} . \frac{1-\frac{1}{x}q^{1-\alpha}}{1-\frac{1}{x}q} . \frac{1-\frac{1}{x}q^{2-\alpha}}{1-\frac{1}{x}q^2} \cdots \frac{1-\frac{1}{x}q^{n-\alpha}}{1-\frac{1}{x}q^n} . \left(1-\frac{1}{x}q^n\right)^{\alpha}.$$

Geht man in (158.) mit α zur Grenze $+\infty$ über, so fliesst daraus eine Function

$$(160.) \qquad w(x) = \prod_0^{\infty}{}_{(n)} (1-xq^n),$$

welche durch die Reihe, (die für $\alpha = +\infty$ aus (156.) erhalten wird,)

$$(161.) \quad w(x) = \sum_0^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-x)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)},$$

worin für $n = 0$ die Eins zu setzen ist, dargestellt werden kann. Daraus ergeben sich für $p(\alpha, x)$, $\pi(\alpha, x)$, welche Functionen bis jetzt nur für $\mathrm{abs}(x) < 1$ resp. $\mathrm{abs}\left(\frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right) < 1$ durch Reihen dargestellt sind, Darstellungen als Quotienten überall convergenter Reihen, nämlich

$$(162.) \quad p(\alpha, x) = \frac{w(x)}{w(xq^{\alpha})} =$$

$$\left(\sum_0^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-x)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\ldots(1-q^n)}\right) : \left(\sum_0^{\infty}{}_{(n)} \frac{(-xq^{\alpha})^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\ldots(1-q^n)}\right),$$

$$(163.)\quad \pi(\alpha, x) = e^{-\alpha i\pi}.x^\alpha \frac{w\left(\frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right)}{w\left(\frac{1}{x}q\right)}$$

$$= e^{-\alpha i\pi}.x^\alpha \frac{\sum_0^\infty{}_{(n)} \frac{\left(\frac{-1}{xq^{\alpha-1}}\right)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^n)}}{\sum_0^\infty{}_{(n)} \frac{\left(\frac{-q}{x}\right)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^n)}},$$

wobei wir voraussetzen, dass abs $(q) < 1$ sei. Für abs$(q) > 1$ ergeben sich andere Entwicklungen, die sich in meiner Abhandlung über die Heine'sche Reihe, im Crelle'schen Journale Bd. 70 p. 258 vorfinden. Auch sind dort, insoweit dies möglich ist, $p(\alpha,x)$ und $\pi(\alpha,x)$ durch Partialbruchreihen und Kettenbrüche dargestellt.

Für die Function $p(\alpha,q)$ ist von Herrn Heine die Bezeichnung $\Omega(\alpha)$ eingeführt worden. Ich habe, um an die Gaussische Π-Function zu erinnern,

$$p(\alpha, q) = (1-q)^\alpha \Pi(\alpha, q)$$

gesetzt, weil für $q = 1$

$$(164.)\quad \Pi(\alpha, q) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)^\alpha.\frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}.\frac{1-q^2}{1-q^{\alpha+2}}\dots\frac{1-q^n}{1-q^{\alpha+n}},$$

in die Gaussische Function

$$\Pi(\alpha) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\alpha+1}.\frac{2}{\alpha+2}.\frac{3}{\alpha+3}\dots\frac{n}{\alpha+n}.(n+1)^\alpha$$

übergeht. Sie besitzt, wie man leicht sieht, die Eigenschaft,

$$(165.)\quad \frac{1-q^\alpha}{1-q}.\Pi(\alpha-1, q) = \Pi(\alpha, q),$$

welche die der Gaussischen Function $\alpha\Pi(\alpha-1) = \Pi(\alpha)$ für $q = 1$ direct liefert.

Nun bezeichnen wir weiter mit

$$(166.)\quad \mathop{\mathrm{S}}_x^{xq^n} f(x).\Delta\frac{\lg x}{\lg q} \quad \text{oder} \quad \mathop{\mathrm{S}}_x^{xq^n} f(x).\frac{\Delta x}{x(q-1)}$$

die Summe $\sum_0^{n-1}{}_{(\mu)} f(xq^\mu)$ und nennen diese Ausdrücke bestimmte Summen. Dann ist unter der Voraussetzung abs $(q^{\lambda+1}) < 1$, die zur Convergenz nöthig ist, die bestimmte Summe

$$\overset{q^\infty}{\underset{1}{\mathrm{S}}} s^\lambda . p(\mu, sq) \frac{\Delta s}{q-1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} q^{n(\lambda+1)} . p(\mu, q^{n+1})$$

$$= (1-q)^\mu \Pi(\mu, q) \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} q^{n(\lambda+1)} . \frac{1-q^{\mu+1}}{1-q} . \frac{1-q^{\mu+2}}{1-q^2} \dots \frac{1-q^{\mu+n}}{1-q^n}$$

$$= (1-q)^\mu \Pi(\mu, q) . p(-\mu-1, q^{\mu+\lambda+2}).$$

Die letzte p-Function kann als Product dargestellt werden. Aus der Darstellung der Function $p(-\mu-1, q^{\mu+\lambda+2})$ als Product fliesst die Gleichung

$$(167.) \quad p(-\mu-1, q^{\mu+\lambda+2}) = \frac{\Pi(\lambda, q)}{(1-q)^{\mu+1} . \Pi(\mu+\lambda+1, q)},$$

so dass also

$$(168.) \quad \overset{q^\infty}{\underset{1}{\mathrm{S}}} s^\lambda . p(\mu, sq) . \Delta s = -\frac{\Pi(\mu, q)\, \Pi(\lambda, q)}{\Pi(\mu+\lambda+1, q)}$$

sich ergiebt, woraus für $q = 1-\varepsilon$, wenn ε zu Null abnimmt, die bekannte, hier auf eine neue bemerkenswerthe Weise abgeleitete Formel fliesst

$$\int_0^1 s^\lambda . (1-s)^\mu ds = \frac{\Pi(\mu)\, \Pi(\lambda)}{\Pi(\mu+\lambda+1)}.$$

Die Gaussischen Π-Functionen genügen bekanntlich der Gleichung (siehe pag. 122)

$$\frac{\sin \mu\pi}{\pi} = \frac{1}{\Pi(-\mu) . \Pi(\mu-1)}.$$

Etwas ganz Aehnliches findet für die verallgemeinerten Π-Functionen statt. Bilden wir nämlich aus (164.) das Product

$$\frac{(1-q) q^{-\frac{1}{2}\mu}}{\Pi(-\mu, q)\, \Pi(\mu-1, q)} =$$

$$(q^{-\frac{1}{2}\mu} - q^{\frac{1}{2}\mu}) \lim_{n=\infty} \frac{1-(q^\mu+q^{-\mu})q+q^2}{(1-q)^2} . \frac{1-(q^\mu+q^{-\mu})q^2+q^4}{(1-q^2)^2} \dots$$

$$\dots \frac{1-(q^\mu+q^{-\mu})q^n+q^{2n}}{(1-q^n)^2},$$

so finden wir durch Vergleichung derselben*) mit der Formel (64b.) die Relation

*) Zu demselben Resultate kann man auch ohne vorhergehende Kenntniss der Productentwickelungen der ϑ-Functionen mit Hilfe der Gleichungen (1.) und (2.) gelangen, indem man $\mu = \frac{t}{\lg q}$ setzt. Die Constante bestimmt man durch Specialisirung des Werthes von μ.

(168a.) $$\frac{1-q}{\Pi(-\mu, q)\,\Pi(\mu-1, q)} = -\frac{2\vartheta_{11}(\tfrac{1}{2}\mu \lg q, \tfrac{1}{2}\lg q)}{\vartheta'_{11}(0, \tfrac{1}{2}\lg q)}\, q^{\frac{1}{2}\mu},$$

woraus umgekehrt gefolgert wird, wenn man erst $\mu \lg q$ durch $2t$ setzt und dann q durch q^2 ersetzt,

(168.) $$\frac{\vartheta_{11}(t, a)}{\vartheta'_{11}(0, a)}.e^t = -2\,\frac{1-q^2}{\Pi\left(-\frac{t}{\lg q}, q^2\right)\Pi\left(\frac{t}{\lg q}-1, q^2\right)}$$

$$= -2\,\frac{1}{p\left(-\frac{t}{\lg q}, q^2, q^2\right).p\left(\frac{t}{\lg q}-1, q^2, q^2\right)}.$$

Dieser letzte Ausdruck ist nun als Product zweier p-Functionen eine Quelle neuer Darstellungen der ϑ-Functionen. Die unendlichen Producte sind zwar nicht neu, aber die Darstellungen (156.) und (162.).

Ebenso findet man die Gleichheit

(169.) $$\frac{\vartheta_{11}(\tfrac{1}{2}\lg x q^{\alpha}, \tfrac{1}{2}\lg q)}{\vartheta_{11}(\tfrac{1}{2}\lg x, \tfrac{1}{2}\lg q)}\, e^{\alpha\,[\lg(x\sqrt{q})-i\pi]} = \frac{\pi(\alpha, q, x)}{p(\alpha, q, x)},$$

durch welche die Darstellungen von ϑ-Quotienten, worunter die elliptischen Functionen, vermehrt werden.

Ausführlicheres über die verallgemeinerte binomische Reihe findet man in einer Abhandlung Jacobi's im 32. Bande des Crelle'schen Journals und in der Abhandlung des Herrn Heine über die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe im 34. Bde. pag. 285 des Journals und in meinen Abhandlungen über diese und noch allgemeinere Reihen im 70. Bde. pag. 258 des Journals, und in den Annali di Matematica pura ed applicata Serie II^a Tome IV. pag. 105—138.

Art. 13. Die lineare Transformation der ϑ-Functionen.

Eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der ϑ-Functionen ist die, dass zur Darstellung einer und derselben Function unendlich viele verschiedene Moduln gewählt werden können. Setzt man nämlich

(170.) $$A = i\pi\frac{a\alpha+\beta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi},\quad \xi = \frac{x i\pi}{a\gamma+\delta i\pi},\quad a = i\pi\frac{-\delta A+\beta i\pi}{\gamma A-\alpha i\pi},$$

$$a\gamma+\delta i\pi = \frac{-(i\pi)^2}{A\gamma-\alpha i\pi},\quad x = \frac{-i\pi\xi}{A\gamma-\alpha i\pi}$$

und

$$(171.)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$(172.)\qquad \vartheta_{hg}(x, a) = \text{Const.}\, e^{\frac{\xi^2\gamma}{A\gamma - \alpha i\pi}} . \vartheta_{h'g'}(\xi, A),$$

worin

$$(173.)\qquad h' = -g\gamma + h\delta + \gamma\delta, \quad g' = g\alpha - h\beta + \alpha\beta$$

ist. Vermehrt man nämlich x um $\lambda i\pi$, so vermehrt sich ξ um $-\lambda(A\gamma - \alpha i\pi)$ und die rechte Seite der Gleichung (172.), von dem constanten Factor abgesehen, erhält die Form

$$e^{\frac{[\xi - \lambda(A\gamma - \alpha i\pi)]^2\gamma}{A\gamma - \alpha i\pi}} . \vartheta_{h'g'}[\xi - \lambda(A\gamma - \alpha i\pi), A]$$

$$(-1)^{\alpha\lambda h' + \lambda\gamma g'} . e^{\frac{\xi^2\gamma}{A\gamma - \alpha i\pi} - 2\lambda\gamma\xi + \lambda^2\gamma(A\gamma - \alpha i\pi) - \lambda^2\gamma^2 A + 2\lambda\gamma\xi} . \vartheta_{h'g'}(\xi, A)$$

$$= (-1)^{\lambda[h(\alpha\delta - \beta\gamma) + \alpha\gamma(\beta + \delta + \lambda)]} . e^{\frac{\xi^2\gamma}{A\gamma - \alpha i\pi}} . \vartheta_{h'g'}(\xi, A).$$

Da nun $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich Eins, und $\alpha\gamma(\beta + \delta + \lambda)$ für ungerade λ [wegen (171.)] stets gerade ist, so ist

$$(-1)^{\lambda[h(\alpha\delta - \beta\gamma) + \alpha\gamma(\beta + \delta + \lambda)]} = (-1)^{\lambda h}$$

und es genügt die rechte Seite von (172.) der Functionalgleichung (1.). Vermehrt man aber x um $\varkappa a$, so vermehrt sich ξ um

$$\frac{\varkappa i\pi a}{a\gamma + \delta i\pi} = \varkappa i\pi\left(\delta\frac{a\alpha + \beta i\pi}{a\gamma + \delta i\pi} - \beta\frac{a\gamma + \delta i\pi}{a\gamma + \delta i\pi}\right) = \varkappa\delta A - \beta\varkappa i\pi$$

und $\vartheta_{h'g'}(\xi, A)$ gewinnt den Factor $(-1)^{\beta\varkappa h' + \delta g'\varkappa} . e^{-\varkappa^2\delta^2 A - 2\varkappa\delta\xi}$, $\frac{\xi^2\gamma}{A\gamma - \alpha i\pi}$ geht über in

$$\frac{\xi^2\gamma}{A\gamma - \alpha i\pi} + \frac{2\varkappa(\delta A - \beta i\pi)\gamma\xi}{A\gamma - \alpha i\pi} + \frac{\varkappa^2\gamma(\delta A - \beta i\pi)^2}{A\gamma - \alpha i\pi}$$

$$= \frac{\xi^2\gamma}{A\gamma - \alpha i\pi} + 2\varkappa\delta\xi + \frac{2\varkappa i\pi\xi}{A\gamma - \alpha i\pi} + \varkappa^2\gamma\frac{(A^2\delta - \beta i\pi)^2}{A\gamma - \alpha i\pi},$$

und demnach gewinnt die rechte Seite von (172.) den Factor

$$e^{-2\varkappa x + \varkappa^2\left(\gamma\frac{(A\delta - \beta i\pi)^2}{A\gamma - \alpha i\pi} - \delta^2 A\right) + i\pi\varkappa(\beta h' + \delta g')} = (-1)^{\varkappa g} . e^{-2\varkappa x - \varkappa^2 a},$$

so dass sie der Functionalgleichung (2.) Genüge leistet und sich daher von der linken Seite nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann, w. z. b. w.

Die Abhängigkeit des noch unbestimmt gelassenen constanten

Factors von a kann leicht angegeben werden. Wenden wir nämlich die partielle Differentialgleichung (3.) auf die rechte Seite der Gleichung (172.) an, welche ihr genügen muss, so erhalten wir

$$2\frac{d\,\mathrm{Const.}}{da} = \frac{-\gamma}{a\gamma+\delta i\pi}\,.\,\mathrm{Const.}$$

oder

$$(174.)\quad d\lg\mathrm{Const.} = -\tfrac{1}{2}d\lg a\gamma+\delta i\pi,\quad \mathrm{Const.} = D_{hg}\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}},$$

worin nun D_{hg} von a unabhängig ist, und $-\pi$ der Bequemlichkeit halber unter das Wurzelzeichen gesetzt ist. Für $\gamma=1$ nämlich, und $\alpha=0$, $\delta=0$, in welchem Falle (wegen 171.) $\beta=-1$ sein muss und $h'=g$, $g'=h$ ist, erhalten wir $A=-\pi$, wenn wir $a=-\pi$ setzen, und folglich

$$\vartheta_{hg}(x, -\pi) = D_{hg}.\sqrt{1}\,.\,e^{\frac{x^2}{\pi}}.\,\vartheta_{gh}(-xi, -\pi).$$

Setzen wir darin $x = \frac{1}{2}h\pi - \frac{1}{2}gi\pi$, so haben wir

$$\vartheta(0, -\pi)e^{-\frac{1}{2}hgi\pi-\frac{1}{4}h^2\pi+\frac{1}{2}h^2\pi+\frac{1}{2}ghi\pi}$$

$$= D_{hg}\sqrt{1}\,.\,\vartheta(0, -\pi)\,e^{-\frac{1}{2}hgi\pi-\frac{1}{4}g^2\pi+\frac{1}{2}ghi\pi-\frac{1}{2}g^2\pi+\pi(\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}gi)^2+g^2\pi},$$

woraus folgt

$$(175.)\qquad D_{hg} = e^{\frac{1}{2}hgi\pi},$$

wenn das Wurzelzeichen von $\sqrt{1}$ positiv genommen wird. Demnach ist

$$(176.)\quad \vartheta_{hg}(x, a) = \sqrt{\frac{-\pi}{a}}\,.\,e^{\frac{-x^2}{a}+\frac{1}{2}hgi\pi}.\,\vartheta_{gh}\left(\frac{xi\pi}{a}, \frac{\pi^2}{a}\right).$$

Da a eine Grösse ist, deren reeller Theil stets negativ genommen werden muss, so dass der Winkel φ der Zahl $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, so ist

$$\sqrt{\frac{-\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}}(\sin\tfrac{1}{2}\varphi - i\cos\tfrac{1}{2}\varphi)$$

eine Grösse, deren reeller Theil stets positiv ist, weil $\frac{1}{2}\varphi$ immer im ersten oder zweiten Quadranten liegt. *Demnach ist in* (176.) *das Wurzelzeichen stets so zu wählen, dass der reelle Theil des Wurzelwerthes positiv ist.* Die Auswerthung der Grösse D für beliebige α, β, γ, δ, obgleich sie stets nur eine achte Wurzel der Einheit ist, ist dennoch so complicirt, dass sie erst im nächsten Artikel erfolgen wird, so dass wir als vorläufiges Resultat die Gleichung gefunden haben

(177.)

$$\vartheta_{hg}(x, a) = D_{hg}.\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}.\,e^{\frac{-x^2\gamma}{a\gamma+\delta i\pi}}.\,\vartheta_{h'g'}\left(\frac{xi\pi}{a\gamma+\delta i\pi},\, i\pi\frac{a\alpha+\beta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi}\right),$$

$$h' = h\delta - g\gamma + \gamma\delta, \quad g' = -h\beta + g\alpha + \alpha\beta.$$

Ist a reell, so dient die Gleichung (176.) dazu, ϑ-Functionen mit rein imaginärem Argument in solche mit reellem zu verwandeln.

Wendet man auf eine transformirte ϑ-Function noch eine Transformation α', β', γ', δ' an, so erhält die neue Function den Modul

$$i\pi\frac{\alpha' A + \beta' i\pi}{\gamma' A + \delta' i\pi} = i\pi\frac{a(\alpha\alpha' + \gamma\beta') + i\pi(\beta\alpha' + \delta\beta')}{a(\alpha\gamma' + \gamma\delta') + i\pi(\beta\gamma' + \delta\delta')}$$

und das Argument

$$\frac{\xi i\pi}{A\gamma' + \delta i\pi} = \frac{x i\pi}{a(\alpha\gamma' + \gamma\delta') + i\pi(\beta\gamma' + \delta\delta')}$$

und man kann daher diese successiven Transformationen durch die eine

(178.)
$$\alpha'' = \alpha\alpha' + \gamma\beta', \quad \beta'' = \beta\alpha' + \delta\beta',$$
$$\gamma'' = \alpha\gamma' + \gamma\delta', \quad \delta'' = \beta\gamma' + \delta\delta'$$

ersetzen.

Wir zeigen nun noch, dass die Transformation einer ϑ-Function mit dem Modul a in eine solche mit dem Modul $A = i\pi\dfrac{a\alpha + \beta i\pi}{a\gamma + \delta i\pi}$ benutzt werden kann, um schwach convergente ϑ-Reihen in stärker convergente zu verwandeln. Diese Reihen convergiren nämlich um so rascher, je grösser der absolute Betrag des reellen Theiles des Moduls ist. Ist nun $a = -p\pi + p'\pi i$, so kann vorausgesetzt werden, dass p' in den Grenzen liege $-\frac{1}{2} \leqq p' \leqq \frac{1}{2}$, weil durch die Transformation $\alpha = \delta = 1$, $\gamma = 0$, β beliebig, wenn β passend gewählt wird, q sofort in jene Grenzen eingeschlossen werden kann. Nun ist aber

$$A = i\pi\frac{-p\alpha + (p'\alpha + \beta)i}{-p\gamma + (p'\gamma + \delta)i}$$

$$= -\pi\frac{p(\alpha\delta - \beta\gamma)}{p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2} + i\pi\frac{(p^2 + p'^2)\alpha\gamma + p'(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta}{p^2\gamma^2 + (p'\gamma + \delta)^2},$$

woraus sich zunächst ergiebt, *dass eine Transformation, in welcher $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht 1, sondern -1 wäre, nicht möglich ist, weil in diesem Falle der reelle Theil von A positiv würde, und daher*

die ϑ-Reihen nicht convergiren könnten. Ist $\alpha\delta-\beta\gamma=n$, so nennt man die Transformation eine Transformation vom n^{ten} Grade.*)

Nun ist aber offenbar der reelle Theil von A, also $\frac{-p\pi}{p^2\gamma^2+(p'\gamma+\delta)^2}$ seinem absoluten Betrage nach dann grösser als der absolute Betrag des reellen Theiles von a, also von $-p\pi$, wenn $p^2\gamma^2+(p'\gamma+\delta)^2<1$ ist. Für $\gamma=0$ ist [wegen (171.)] $\delta=\pm 1$ und also $p^2\gamma^2+(p'\gamma+\delta)^2=1$. Für $\delta=0$ ist $\gamma=\pm 1$ und $p^2\gamma^2+(p'\gamma+\delta)^2=p^2+p'^2$, also, da p'^2 höchstens gleich $\frac{1}{4}$ ist, kleiner als 1, wenn $p^2<\frac{3}{4}$, oder der reelle Theil von a seinem absoluten Betrage nach kleiner als $\pi\sqrt{\frac{3}{4}}$ ist. Hieraus folgt der von Jacobi herrührende Satz:

(179.) *So lange der absolute Betrag des reellen Theiles des Moduls a einer ϑ-Function unter $\pi\sqrt{\frac{3}{4}}$ liegt, lässt sich stets eine lineare Transformation finden, durch welche ein Modul eingeführt wird, dessen reeller Theil seinem absoluten Betrage nach den von a übersteigt, so dass die ϑ-Reihe mit dem transformirten Modul rascher convergirt, als die mit dem Modul a.*

Art. 14. Grenzwerthe der ϑ-Functionen für rein imaginäre Moduln. Bestimmung der Transformationsconstanten D.

Die Gleichung (177.) kann dazu benutzt werden, zu erfahren, wie sich, für $x=0$, die ϑ-Functionen verhalten, wenn a rein imaginär ist, wenigstens für rationale Multipla von $i\pi$. Sie bilden ein Beispiel für eine Function einer complexen Variabeln, welche über ein bestimmtes Gebiet hinaus nicht stetig fortgesetzt werden kann, weil sie längs der ganzen Begrenzung des Stückes (in unendlich vielen Puncten) unstetig wird. Betrachtet man die ϑ-Function als Function von a, so ist dies Gebiet die Halbebene, in der der reelle Theil von a negativ ist. Betrachtet man sie als Function von q, so ist das Gebiet das Innere des Einheitskreises (vergl. pag. 45). Zunächst erhalten wir aus (176.), wenn a der Null so genähert wird, dass der reelle Theil immer negativ ist,

$$\lim_{a=0}\sqrt{\frac{a}{-\pi}}\cdot e^{\frac{-g^2\pi^2}{4a}}\cdot\vartheta_{h\,g}(0,a)=\lim_{a=0}e^{\frac{1}{2}hgi\pi-\frac{g^2\pi^2}{4a}}\cdot\vartheta_{g\,h}\left(0,\frac{\pi^2}{a}\right),$$

*) Ist $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, so ist der Flächeninhalt der aus a und $i\pi$ einerseits, und aus $a\alpha+\beta i\pi$, $a\gamma+\delta i\pi$ andrerseits gebildeten Parallelogramme gleich.

welche Gleichung für $h=1$, $g=1$ die Identität $0=0$ liefert, aber sonst die Gleichungen

$$(180.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{a=0} \sqrt{\dfrac{a}{-\pi}}\,.\,\vartheta(0,a) = \lim\limits_{a=0} \sqrt{\dfrac{a}{-\pi}}\,.\,\vartheta_{10}(0,a) = 1, \\ \lim\limits_{a=0} \sqrt{\dfrac{a}{-\pi}}\, e^{\frac{-\pi^2}{4a}}\,.\,\vartheta_{01}(0,a) = 2. \end{cases}$$

Hierin kann statt $x=0$ für x eine Grösse gesetzt werden, welche mit a verschwindet.

Wir beschränken nun unsere Untersuchungen auf den Fall $h=0$, $g=0$. Setzen wir dann, n als positiv vorausgesetzt, $a=b\pm\frac{i\pi}{2n}$, so liefert die Gleichung (176.) die folgende

$$\vartheta\left(0,\, b\pm\frac{i\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{-\pi}{b\pm\frac{i\pi}{2n}}}\,.\,\vartheta\left(0,\, \frac{\pi^2}{b\pm\frac{i\pi}{2n}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{-2n\pi}{2nb\pm i\pi}}\,.\,\vartheta\left(0,\, \frac{4n^2b\pi^2\mp 2ni\pi^3}{4n^2b^2+\pi^2}\right).$$

Wenn hierin b gegen 0 strebt, so nähert sich der Modul der letzten ϑ-Function der 0, abgesehen von einem ganzen Multiplum von $2\pi i$. Da nun aber eine ϑ-Function als Function ihres Moduls nach pag. 129 die Periode $2\pi i$ hat, so können wir beim Grenzübergange in der letzten ϑ-Function den imaginären Theil des Moduls ganz fortlassen, so dass wir haben

$$\lim_{b=0} \sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\, b\pm\frac{i\pi}{2n}\right) =$$

$$\sqrt{\pm 2ni}\,\lim_{b=0}\sqrt{\frac{4n^2b\pi^2}{-\pi(4n^2b^2+\pi^2)}}\,.\,\vartheta\left(0,\, \frac{4n^2b\pi^2}{4n^2b^2+\pi^2}\right)\sqrt{\frac{4n^2b^2+\pi^2}{4n^2\pi^2}}$$

und hieraus finden wir mit Hilfe der Gleichung (180.)

$$(181.)\qquad \lim_{b=0} \sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,.\,\vartheta\left(0,\, b\pm\frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{1\pm i}{2\sqrt{n}},$$

worin sich die Vorzeichen $\pm$ auf beiden Seiten entsprechen, und *worin die Wurzel positiv zu nehmen ist.*

Setzen wir $a=b\pm\frac{i\pi}{2n+1}$, so liefert die Gleich. (176.)

$$\vartheta\left(0,\ b \pm \frac{i\pi}{2n+1}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{-(2n+1)\pi}{(2n+1)b \pm i\pi}}\ \vartheta\left(0,\ \frac{(2n+1)^2 b\pi^2 \mp (2n+1)i\pi^3}{(2n+1)^2b^2+\pi^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{-(2n+1)\pi}{(2n+1)b \pm i\pi}}\ .\ \vartheta_{01}\left(0,\ \frac{(2n+1)^2 b\pi^2 \mp (2n+1)i\pi^3}{(2n+1)^2b^2+\pi^2} - i\pi\right),$$

(nach pag. 129). Hier nähert sich der Modul mit b, abgesehen von einem ganzen Multiplum von $2\pi i$, der 0, wir können daher beim Grenzübergange den imaginären Theil ganz fortlassen (ebenfalls nach pag. 129), und erhalten sonach

$$\lim_{b=0} \sqrt{\frac{-b}{\pi}}\ .\ e^{\frac{-\pi^2}{4(2n+1)^2b}}\ .\ \vartheta\left(0,\ b \pm \frac{i\pi}{2n+1}\right) =$$

$$\sqrt{\pm(2n+1)i}\ \lim_{b=0} \sqrt{\frac{(2n+1)^2 b\pi^2}{-\pi\left[(2n+1)^2b^2+\pi^2\right]}}\ .\ e^{-\frac{\pi^2+(2n+1)^2b^2}{4(2n+1)^2b^2}} \times$$

$$\vartheta_{01}\left(0,\ \frac{(2n+1)^2b\pi^2}{(2n+1)^2b^2+\pi^2}\right)\sqrt{\frac{(2n+1)^2b^2+\pi^2}{(2n+1)^2\pi^2}}\quad .$$

und hieraus nach (180.)

$$(182.)\quad \lim_{b=0} \sqrt{\frac{-b}{\pi}}\ .\ e^{\frac{-\pi^2}{4(2n+1)^2b}}\ .\ \vartheta\left(0,\ b \pm \frac{i\pi}{2n+1}\right) = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{2},$$

worin sich die Vorzeichen $\pm$ auf beiden Seiten entsprechen, und die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Ordnen wir die Reihe $\vartheta(x) = \sum_{(m)}{}_{-\infty}^{\infty} e^{am^2+2mx}$ so an, dass wir die Glieder, welche um μ Stellen auseinanderstehen, für sich summiren, so finden wir

$$\vartheta(x,\ a) = \sum_{(m)}{}_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{array}{r} e^{a(m\mu)^2+2(m\mu)x} + e^{a(m\mu+1)^2+2(m\mu+1)x} + \ldots \\ \ldots + e^{a(\mu m+\mu-1)^2+2(m\mu+\mu-1)x} \end{array}\right\}$$

$$= \sum_{(r)}{}_{r=0}^{r=\mu-1} \sum_{(m)}{}_{-\infty}^{\infty} e^{a\mu^2m^2+2m(\mu ra+\mu x)+2rx+r^2a},$$

oder

$$(183.)\qquad \vartheta(x,\ a) = \sum_{(r)}{}_{r=0}^{r=\mu-1} e^{2rx+r^2a}\ .\ \vartheta\left[\mu(x+ra),\ a\mu^2\right].$$

Wenden wir nun diese Transformation auf die Function $\vartheta\left(0,\, b+\frac{m}{n}i\pi\right)$ an, indem wir $2n$ für μ wählen, und m als erlative Primzahl zu n voraussetzen, so erhalten wir

$$\vartheta\left(0,\, b+\frac{mi\pi}{n}\right)=\sum_{r=0}^{r=2n-1}{}_{(r)}\, e^{r^2\left(b+\frac{mi\pi}{n}\right)}.\vartheta(2nbr,\, 4bn^2)$$
$$=\sum_{r=0}^{r=2n-1}{}_{(r)}\sqrt{\frac{-\pi}{4bn^2}}\, e^{\frac{r^2mi\pi}{n}}.\vartheta\left(\frac{i\pi r}{2n},\, \frac{\pi^2}{4n^2b}\right),$$

worin wir auf jedes einzelne Glied der Summe die Gleichung (176.) angewendet haben. Multipliciren wir diese Gleichung mit $\sqrt{\frac{b}{-\pi}}$ und gehen mit b zur Grenze 0 über, so erhalten wir

$$(184.)\quad \lim_{b=0}\sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\, b+\frac{mi\pi}{n}\right)=\frac{1}{2n}\sum_{0}^{2n-1}{}_{(r)}\, e^{r^2m\frac{2\pi i}{2n}}$$
$$=\frac{\varphi(m,\, 2n)}{2n}$$

nach der Gaussischen Bezeichnung dieser Summe. Für $m=\pm 1$ folgt aus den Gleichungen (181.) und (182.)

$$(185^{a.})\quad \begin{cases}\varphi(\pm 1,\, 2n)=(1\pm i)\sqrt{n}, & n\equiv 0(2),\\ \varphi(\pm 1,\, 2n)=0, & n\equiv 1(2),\end{cases}$$

worin das Wurzelzeichen positiv zu nehmen ist.

Mit Hilfe des bekannten Satzes*) $\varphi(hm,n).\,\varphi(hn,m)=\varphi(h,mn)$ folgt hieraus für ungerade n leicht die Gleichung

$$(185^{b.})\qquad \varphi(1,\, n)=\frac{1+i}{1+i^n}.\sqrt{n}=i^{\frac{1}{4}(n-1)^2}.\sqrt{n}.$$

Ist m gerade und n ungerade, so kann man (183.) wieder anwenden, indem man n für μ setzt, wodurch man die Gleichung erhält

$$\vartheta\left(0,\, b+\frac{mi\pi}{n}\right)=\sum_{0}^{n-1}{}_{(r)}\, e^{r^2\left(b+\frac{mi\pi}{n}\right)}.\vartheta(nbr,\, bn^2)$$
$$=\sum_{0}^{n-1}{}_{(r)}\sqrt{\frac{-\pi}{bn^2}}\, e^{r^2\frac{mi\pi}{n}}.\vartheta\left(\frac{i\pi r}{n},\, \frac{\pi^2}{bn^2}\right)$$

---

*) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie herausgegeben von Dedekind, erste Aufl. pag. 325.

und hieraus

$$(186.)\quad \lim_{a-0}\sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,.\,\vartheta\left(0,\, b+\frac{mi\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_{(r)}\, e^{r^2\frac{mi\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\varphi(\tfrac{1}{2}m,\, n).$$

Betrachtet man nun die Gaussischen Summen $\varphi(p, q)$, worin p und q relative Primzahlen sind, als bekannte Grössen, was um so mehr gestattet ist, als ihre Auswerthung nur niedere zahlentheoretische Mittel erfordert, nachdem die Gleichungen (185ᵃ.) (185ᵇ.) gefunden sind, so ist das Verhalten der Function $\vartheta(0, a)$ für solche a, welche gegen ein rationales Multiplum von $i\pi$ streben, durch die Gleichungen (184.) und (186.) bestimmt. Wir bemerken nur fürs Folgende, dass $\varphi(p, q)$ nur dann verschwindet, wenn gleichzeitig $p \equiv 1$ mod. (2), $q \equiv 2$ mod. (4) ist.

Mit Hilfe der gewonnenen Resultate ist es leicht die Constante D_{hg}, die im vorigen Artikel noch unbestimmt gelassen war, auszuwerthen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $h = 0$, $g = 0$, (in welchem wir die Indices an D fortlassen,) weil der allgemeine aus diesem durch blosse Abänderung des Argumentes und Multiplication mit einer Exponentiellen erhalten wird, und nehmen noch die Fälle $\gamma = 0$ oder $\alpha = 0$ vorauf.

Für $\gamma = 0$ ist $A = a + \lambda i\pi$ und wir haben nach dem pag. 129 Bemerkten

$$(187.)\quad \vartheta_{hg}(x, a) = e^{\frac{1}{4}(2h-3h^2)\lambda i\pi}\,.\,\vartheta_{h,\, g+(1-h)\lambda}(x,\, a+\lambda i\pi).$$

Hieraus erhalten wir den Fall $\alpha = 0$, wenn wir auf die rechte Seite die Gleichung (176.) anwenden. Es ergiebt sich

$$(188.)\quad \vartheta_{hg}(x, a) =$$

$$\sqrt{\frac{-\pi}{a+\lambda i\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{a+\lambda i\pi}+(\frac{1}{2}hg+\frac{1}{4}h^2\lambda+h\lambda)i\pi}\,.\,\vartheta_{g+(1-h)\lambda,\, h}\left(\frac{xi\pi}{a+\lambda i\pi},\, \frac{\pi^2}{a+\lambda i\pi}\right).$$

Im allgemeinen Falle sei $h = g = 0$, also $h' = \gamma\delta$, $g' = \alpha\beta$, und γ und α seien von 0 verschieden. Setzen wir dann

$$a = b - i\pi\frac{\delta}{\gamma},\quad A = i\pi\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\pi^2}{b}\cdot\frac{1}{\gamma^2},\quad a\gamma+\delta i\pi = b\gamma,$$

und setzen γ als positiv voraus, was immer geschehen kann, weil sich die Transformation nicht ändert, wenn man allen vier Zahlen α, β, γ, δ das entgegengesetzte Zeichen giebt, so folgt aus der Transformationsgleichung (177.)

$$(189.)\quad \vartheta(x,a) = D\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}\,.\,e^{\frac{-x^2\gamma}{a\gamma+\delta i\pi}}\,.\,\vartheta_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\left(\frac{xi\pi}{a\gamma+\delta i\pi},\ A\right),$$

worin der reelle Theil der Wurzel positiv genommen werden soll, und hieraus für $x=0$

$$(190.)\quad \vartheta\left(0,\ b-i\pi\frac{\delta}{\gamma}\right) = D\sqrt{\frac{-\pi}{b\gamma}}\,.\,\vartheta_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\left(0,\ \frac{\pi^2}{b\gamma^2}+\frac{\alpha i\pi}{\gamma}\right).$$

Ist nun

γ gerade, δ ungerade,

(wegen (171.) sind γ und δ relative Primzahlen,) so folgt aus (184.), wenn wir die Gleichung (190.) mit $\sqrt{\frac{b}{-\pi}}$ multipliciren und mit b zur Grenze 0 übergehen

$$\frac{1}{2\gamma}\varphi(-\delta,\ 2\gamma) = D\sqrt{\frac{1}{\gamma}}\,.\,e^{-\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma\delta i\pi},$$

$$(191.)\qquad D = \tfrac{1}{2}i^{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\sqrt{\frac{1}{\gamma}}\,.\,\varphi(-\delta,\ 2\gamma).$$

Ist

γ ungerade, δ gerade,

so folgt aus (186.)

$$\frac{1}{\gamma}\varphi(-\tfrac{1}{2}\delta,\ \gamma) = D\sqrt{\frac{1}{\gamma}}\,.\,e^{-\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma\delta i\pi},$$

$$(192.)\qquad D = i^{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\sqrt{\frac{1}{\gamma}}\,.\,\varphi(-\tfrac{1}{2}\delta,\ \gamma),$$

worin überall die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Sind aber γ und δ beide ungerade, so kann man auf die Gleichung (177.) die Transformation (176.) anwenden, wodurch ihre rechte Seite die Form erhält

$$D\,.\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}\,.\sqrt{\frac{-\pi}{A}}\,.\,e^{\frac{-x^2\gamma}{a\gamma+\delta i\pi}-\frac{1}{A}\left(\frac{xi\pi}{a\gamma+\delta i\pi}\right)^2+\frac{1}{2}h'g'i\pi}\ \times$$
$$\vartheta_{h'\,g'}\left(\frac{xi\pi}{a\gamma+\delta i\pi}\,.\,\frac{i\pi}{A},\ \frac{\pi^2}{A}\right)$$

und für $x=0$ die Form

$$D\,.\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}\,.\sqrt{\frac{-\pi(a\gamma+\delta i\pi)}{(a\alpha+\beta i\pi)i\pi}}\,e^{h'g'i\pi}\,.\,\vartheta_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\left(0,\ -i\pi\frac{a\gamma+\delta i\pi}{a\alpha+\beta i\pi}\right)$$

setzt man $a = b-\frac{\beta}{\alpha}i\pi$, $\frac{\pi^2}{A} = -i\pi\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\pi^2}{b\alpha^2}$ und setzt man α als positiv voraus, so folgt

$$(193.)\quad \sqrt{\frac{b}{-\pi}}\,\vartheta\left(0,\ b-i\pi\frac{\beta}{\alpha}\right)=$$

$$D\sqrt{\frac{-\pi\alpha}{b\alpha\gamma+i\pi}}\cdot\sqrt{\frac{-\pi(\alpha\gamma b+i\pi)}{\alpha^2 b i\pi}}\sqrt{\frac{b}{-\pi}}\cdot\vartheta_{\alpha\beta,\gamma\delta}\left(0,\ \frac{-\pi\gamma}{\alpha}+\frac{\pi^2}{\beta\alpha^2}\right),$$

geht man darin mit b zur Grenze 0 über, so folgt, wenn

α gerade, β ungerade ist,

aus (184.)

$$\frac{1}{2\alpha}\varphi(-\beta,2\alpha)=\frac{D.i^{-\alpha\beta\gamma\delta}.(1+i)\sqrt{\alpha}}{\alpha\sqrt{2}},$$

$$(194.)\qquad D=\frac{i^{\alpha\beta\gamma\delta}.\varphi(-\beta,2\alpha)}{\sqrt{2}.\sqrt{\alpha}.(1+i)},$$

aber wenn

α ungerade, β gerade ist,

aus (186.)

$$\frac{1}{\alpha}\varphi(-\tfrac{1}{2}\beta,\alpha)=\frac{i^{-\alpha\beta\gamma\delta}.D(1+i)\sqrt{\alpha}}{\alpha.\sqrt{2}},$$

$$(195.)\qquad D=\frac{i^{\alpha\beta\gamma\delta}.\sqrt{2}.\varphi(-\tfrac{1}{2}\beta,\alpha)}{(1+i)\sqrt{\alpha}},$$

womit nun D in allen Fällen bestimmt ist.

Vermehren wir nun in der Gleichung (189.) x um $\tfrac{1}{2}ha+\tfrac{1}{2}gi\pi$ und multipliciren mit $e^{hx+\frac{1}{4}hgi\pi}$, so geht sie über in

$$(196.)\quad \vartheta_{hg}(x,a)=D.e^{\chi i\pi}.\sqrt{\frac{-\pi}{a\gamma+\delta i\pi}}.e^{\frac{\xi^2\gamma}{A\gamma-\alpha i\pi}}\vartheta_{h'g'}(\xi,A),$$

$$\chi=\tfrac{1}{4}h\beta\delta(\alpha-2\gamma)-\tfrac{1}{4}g\alpha\beta(\beta-2\delta)-\tfrac{1}{2}\beta\gamma hg-\tfrac{1}{4}\alpha\gamma g^2-\tfrac{1}{4}\beta\delta h^2,$$

woraus sich ergiebt, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung (177.) vergleicht:

$$(197.)\qquad D_{hg}=D.e^{\chi i\pi}.$$

Art. 15. Lineare Transformation der elliptischen Functionen.

Die Formeln, welche wir durch die lineare Transformation der ϑ-Functionen erhalten haben, setzen uns in den Stand, ein und dieselbe Function $\lambda(u)$ oder, genauer bezeichnet, $\lambda(u,k)$ auf unendlich viele Arten als Quotienten zweier ϑ-Functionen darzustellen. Da nämlich

$$\vartheta_{hg}\left(\frac{xi\pi}{a\gamma+\delta i\pi},\ i\pi\frac{a\alpha+\beta i\pi}{a\gamma+\delta i\pi}\right)=\vartheta_{hg}\left(\frac{-i\pi u}{2\gamma iK'+2\delta K},\ \frac{-\pi K'}{K}\right)$$

ist, oder wenn wir $iK'\alpha + K\beta = i\mathfrak{K}'$, $iK'\gamma + K\delta = \mathfrak{K}$ und $-\frac{\pi\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}} = A$ setzen (woraus $K = \mathfrak{K}\alpha - i\mathfrak{K}'\gamma$, $iK' = i\mathfrak{K}'\delta - \mathfrak{K}\beta$ folgt), gleich

$$\vartheta_{hg}\left(\frac{-i\pi u}{2\mathfrak{K}}, \frac{-\pi\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}}\right) = \Theta_{hg}(u, A),$$

ist, so folgt aus (177)

$$\Theta_{hg}(u, a) = D_{hg} \cdot \sqrt{\frac{iK}{2iK + 2K\delta}} \cdot e^{-\frac{\pi i u^2 \gamma}{2K(2iK'\gamma + 2K\delta)}} \cdot \Theta_{h'g'}(u, A).$$

Hieraus ergiebt sich für $\lambda(u, k)$ der Ausdruck

$$(198.) \qquad \lambda(u, k) = \frac{\Theta_{11}(u, a)}{\Theta_{01}(u, a)} \cdot \frac{\Theta(0, a)}{\Theta_{10}(0, a)} =$$

$$e^{-\frac{1}{2}\beta\gamma i\pi} \cdot \frac{\Theta_{\delta-\gamma+\gamma\delta,\, \alpha-\beta+\alpha\beta}(u, A)}{\Theta_{\gamma\delta-\gamma,\, \alpha+\alpha\beta}(u, A)} \cdot \frac{\Theta_{\gamma\delta,\, \alpha\beta}(0, A)}{\Theta_{\delta+\gamma\delta,\, \alpha\beta-\beta}(0, A)}.$$

Dies sind unendlich viel verschiedene Formen für die Function λ, welche der Differentialgleichung $du = \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-k^2\lambda^2}}$ genügt.

Da nun aber, $\frac{\Theta_{10}^2(0, A)}{\Theta^2(0, A)} = k_1$ gesetzt, die Function $\Lambda(u) = \frac{\Theta_{11}(u, A)}{\Theta_{01}(u, A)\sqrt{k_1}}$ nach Art. 4 pag. 139 der Differentialgleichung

$$du = \frac{d\Lambda}{\Lambda'(0)\sqrt{(1-\Lambda^2)(1-k_1{}^2\Lambda^2)}}$$

Genüge leistet, so ist $\Lambda(u) = \lambda(\varrho u, k_1)$, wenn $\varrho = \Lambda'(0)$ gesetzt wird, und es ergiebt sich mittels der Gleichung (177.) ein einfacher Zusammenhang zwischen $\lambda(\varrho u, k_1)$ und $\lambda(u, k)$.

Ist nun

$$\alpha\beta \equiv \gamma\delta \equiv \alpha\beta - \beta \equiv 0, \quad \gamma\delta + \delta \equiv 1 \quad \text{mod } 2,$$

so müssen α und δ ungerade, β und γ gerade sein, und man findet aus (198.), wenn man die Indices auf 0, 1 reducirt, was mittels der Formel (6a.) geschieht,

$$(199.) \quad \lambda(u, k) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \cdot \frac{\Theta_{11}(u, A)}{\Theta_{01}(u, A)} \cdot \frac{\Theta(0, A)}{\Theta_{10}(0, A)}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \lambda(\varrho u, k_1).$$

Ist α von der Form $4n+1$, so ist nach (171.) pag. 184 δ ebenfalls von der Form $4n+1$, und es unterscheidet sich $\lambda(\varrho u, k_1)$ von $\lambda(u, k)$ nur dadurch, dass $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ an die Stelle von K, K' getreten

sind. Nun ist $\frac{\partial\lambda(\varrho u, k_1)}{\partial u}_{(u=0)} = \frac{\partial\lambda(u, k)}{\partial u}_{(u=0)} = 1$, folglich auch $\varrho = 1$. Für $u = \mathfrak{K} + i\mathfrak{K}'$ aber findet man

$k_1 = 1 : \lambda[K + iK' + 2(\delta - 1 + \beta)K + iK'(\alpha + \gamma - 1)] = (-1)^{\frac{1}{2}\beta}k.$

Da aber in der Definition von $\lambda(u)$ als Umkehrung eines elliptischen Integrales nur k^2 vorkommt, also $\lambda(u, k) = \lambda(u, -k)$ ist, so gelangt man zu dem Satze:

(200.) *Will man das Integral* $u = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda)(1-k^2\lambda^2)}}$ *mittels der Gleichung*

$$\lambda(u) = \frac{\vartheta_{11}\left(\frac{-i\pi u}{2\mathfrak{K}}, \frac{-\pi\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}}\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{-i\pi u}{2\mathfrak{K}}, \frac{-\pi\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}}\right)} \cdot \frac{\vartheta\left(0, \frac{-\pi\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}}\right)}{\vartheta_{10}\left(0, \frac{-\pi\mathfrak{K}'}{2\mathfrak{K}}\right)}$$

umkehren und sind K, iK' durch die auf kürzestem Wege unter Annahme des Hauptwerthes der Wurzel genommenen Integrale

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}, \quad iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}$$

bestimmt, so kann man für $\mathfrak{K}$, $i\mathfrak{K}'$ die Grössen

$$\mathfrak{K} = K\gamma + iK'\delta, \quad i\mathfrak{K}' = K\alpha + iK'\beta$$

wählen, wenn

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \alpha = 4n+1, \quad \delta = 4n'+1, \quad \beta = 2m, \quad \gamma = 2m'$$

ist.

Ist α von der Form $4n+3$ und sind β, γ gerade und mithin auch δ von der Form $4n+3$, so ist der Differentialquotient von $\lambda(\varrho u, k_1)$ gleich -1, und folglich $\varrho = -1$, für $u = \mathfrak{K} + i\mathfrak{K}'$ findet sich $k_1 = \pm k$ und folglich

$$\lambda(u, k) = -\lambda(-u, \pm k).$$

Ist ferner $\gamma\delta - \gamma \equiv 0$, $\alpha + \beta\alpha \equiv 1$, $\gamma \equiv 1$, mod 2, so ist β gerade. Dann liefert die Gleichung (198.) die Gleichung

$$\text{(201.)} \qquad \lambda(u, k) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)} \cdot \frac{\Theta_{11}(u, A)}{\Theta_{01}(u, A)} \cdot \frac{\Theta_{10}(0, A)}{\Theta(0, A)}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)} \cdot k_1 \cdot \lambda(\varrho u, k_1).$$

Da für $u = 0$ $\frac{\partial\lambda(\varrho u, k_1)}{\partial u} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)}}{k_1}$ ist, und sich für $u = \mathfrak{K}$, $k_1 = \pm\frac{1}{k}$ ergiebt, so erhält man

$$k.\lambda(u, k) = \pm \lambda\left(\pm uk, \frac{1}{k}\right),$$

worin sich die Vorzeichen entsprechen.

Ist $\alpha\beta \equiv \gamma\delta \equiv 0, \quad \beta \equiv 1, \quad \delta \equiv 0, \quad \text{mod } 2,$

so ist

(202.) $$i\lambda(u, k) = \pm \lambda(\pm ui, k') : \mu(ui, k').$$

Ist $\alpha\beta \equiv 0, \quad \gamma\delta \equiv 1, \quad \beta \equiv 1, \quad \delta \equiv 1, \quad \text{mod } 2,$

so ist

(203.) $$ik'\lambda(u, k) = \pm \lambda\left(\pm iuk', \frac{1}{k'}\right) : \nu\left(iuk', \frac{1}{k'}\right).$$

Ist $\alpha\beta \equiv 1, \quad \gamma\delta \equiv 0, \quad \alpha \equiv 1, \quad \delta \equiv 0, \quad \text{mod } 2,$

so ist

(204.) $$ik\lambda(u, k) = \pm \lambda\left(\pm iuk, \frac{ik'}{k}\right) : \mu\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right).$$

Ist $\alpha\beta \equiv 1, \quad \gamma\delta \equiv 0, \quad \beta \equiv 1, \quad \delta \equiv 1, \quad \text{mod } 2,$

so ist

(205.) $$k'\lambda(u, k) = \pm \lambda\left(\pm uk', \frac{ik}{k'}\right) : \nu\left(uk', \frac{ik}{k'}\right).$$

Die vier letzten Transformationen (202.), (203.), (204.), (205.), von welchen uns zwei (202.), (203) für reelle k in den Stand setzen, eine elliptische Function mit rein imaginärem Argument durch elliptische Functionen mit reellem Argument und reellem Modul auszudrücken, gehören nicht zu den linearen, wenn die Jacobi'sche canonische Form für ein elliptisches Integral erster Gattung zu Grunde gelegt wird, wohl aber, wenn dafür die Form $u = \frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}}$ genommen wird.

Um zu allen linearen Transformationen der elliptischen Functionen zu gelangen, wenn die Jacobi'sche canonische Form zu Grunde gelegt wird, kann man durch die Substitution

$$\lambda = -\frac{a + b\lambda_1}{c + d\lambda_1}$$

den Ausdruck

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda)^2(1-k^2\lambda^2)}} \quad \text{in} \quad \frac{d\lambda_1}{\varrho\sqrt{(1-\lambda_1^2)(1-k_1^2\lambda_1^2)}}$$

transformiren, und untersuchen, wie hierzu die Constanten a, b, c, d bestimmt werden müssen. Man gelangt so zu den Transformationsgleichungen:

$$(206.)\quad \lambda(u,k) = \pm\lambda(\pm u,k) = \frac{\pm 1}{k\lambda[\pm(u+iK'),k]},$$

$$(207.)\quad \lambda(u,k) = \pm\frac{1}{k}\lambda\left(\pm uk,\frac{1}{k}\right) = \frac{\pm 1}{\lambda\left(\pm k(u+iK'),\frac{1}{k}\right)},$$

$$(208.)\left\{\begin{aligned}\lambda(u-K-\tfrac{1}{2}iK',k) &= \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\lambda(\varrho u,k_1).(1-\sqrt{k})-(1+\sqrt{k})}{\lambda(\varrho u,k_1).(1-\sqrt{k})+(1+\sqrt{k})},\\ \lambda(u+K+\tfrac{1}{2}iK',k) &= -\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\lambda(\varrho u,k_1)(1-\sqrt{k})+(1+\sqrt{k})}{\lambda(\varrho u,k_1)(1-\sqrt{k})-(1+\sqrt{k})},\end{aligned}\right.$$

worin $\varrho = \frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2,\quad k_1 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2$ ist;

$$(209.)\left\{\begin{aligned}\lambda(u+\tfrac{1}{2}iK',k) &= \frac{1}{i\sqrt{k}}\,\frac{\lambda(\varrho u,k_1)(1-i\sqrt{k})-(1+i\sqrt{k})}{\lambda(\varrho u,k_1)(1-i\sqrt{k})+(1+i\sqrt{k})},\\ \lambda(u-\tfrac{1}{2}iK',k) &= -\frac{1}{i\sqrt{k}}\,\frac{\lambda(\varrho u,k_1)(1-i\sqrt{k})+(1+i\sqrt{k})}{\lambda(\varrho u,k_1)(1-i\sqrt{k})-(1+i\sqrt{k})},\end{aligned}\right.$$

worin $\varrho = \frac{1}{2}i(1+i\sqrt{k})^2,\quad k_1 = \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2.$

Aus den beiden letzten Formeln werden noch vier neue Transformationen erhalten, wenn man $\sqrt{k}$ das negative Zeichen giebt.

Hiermit haben wir zugleich die Beziehung gefunden, welche zwischen den verschiedenen Moduln stattfindet, welche man erhält, wenn man die Function $\sqrt{A\lambda^4+B\lambda^3+C\lambda^2+D\lambda+E}$ durch eine lineare Substitution auf die canonische Form bringt (conf. pagg. 110. 111). Ist nämlich einer unter ihnen k, so giebt es im Ganzen sechs verschiedene, nämlich

$$(210.)\quad k,\ \frac{1}{k},\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2,\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2,\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2,$$

wobei natürlich jedem noch das negative Vorzeichen gegeben werden kann, was aber für die elliptischen Functionen keine Bedeutung hat.

Druckfehler:

Seite 11 Zeile 2 v. u. lies: $\omega(y+h)=\omega(y)+h\,\omega'(y)+h\,[\omega'(y+\zeta h)-\omega'(y)]$.

„ 48 „ 9 v. u. „ δ statt S.

„ 145 „ 4 v. u. „ $-\frac{ha+gi\pi}{2}$ statt $\frac{ha+hi\pi}{2}$.

Halle, Druck von E. Karras.